

# CONTRIBUTION AU CALCUL DES ECOULEMENTS UNIFORMES A SURFACE LIBRE ET EN CHARGE (Première partie)

**B. ACHOUR, A. BEDJAOUI, M. KHATTAOUI, M. DEBABECHE**

## RESUME

L'étude montre que la dimension linéaire  $a = \phi_a(Q, J, \varepsilon, w, v)$  d'un profil liquide ou géométrique de forme quelconque peut s'écrire  $a = \psi a_r$ , dans le domaine pratiquement lisse, et  $a = \lambda a_r$  lorsque l'écoulement est dans le domaine de transition. Le paramètre  $a_r$  représente la dimension linéaire lorsque l'écoulement est turbulent rugueux, véhiculé par une conduite hypothétique de rugosité relative donnée et ayant la même conductivité que celle de la conduite réelle. Les facteurs  $\psi$  et  $\lambda$  sont des coefficients de correction de la dimension linéaire. La méthode proposée dans cette étude est extensible aux canaux et conduites de forme quelconque et son application au cas de la conduite circulaire montre la simplicité du calcul.

## I. INTRODUCTION

Le calcul des écoulements uniformes à surface libre ou en charge occupe une place importante dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur  $h$  de l'écoulement appelée aussi hauteur normale, l'aire de la section mouillée  $A$ , la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement et le débit  $Q$ . D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse  $V$  est généralement associée à la celle de la vitesse moyenne; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée; cet aspect du problème a été longuement étudié par plusieurs chercheurs (*Prandtl*, 1926; *Keulegan*, 1938; *Hama*, 1954; *Schlichting*, 1955; *Morris*, 1955; *Iwasa*, 1957). Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens strict du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières (*Chow*, 1973). Cette approche simplifiée donne des résultats assez satisfaisants dans bon nombre de cas pratiques. Les relations de calcul de la profondeur normale dans les canaux expriment de manière approximative la vitesse moyenne  $V$  sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Ce régime doit être considéré non seulement comme étant turbulent, mais aussi comme étant rugueux en raison

du fait que l'effet des forces dues à la viscosité est laissée hors considération. Les relations appliquées se présentent, en règle générale, sous la forme  $V = CR_h^\beta J^\gamma$ , où  $R_h$  est le rayon hydraulique,  $J$  est la pente de la ligne de charge,  $C$  est un paramètre qui traduit la résistance de l'écoulement et dépend de la vitesse moyenne  $V$ , de  $R_h$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  des parois du canal, de la viscosité du liquide et de beaucoup d'autres facteurs. L'une des premières formules destinées au calcul de l'écoulement uniforme est probablement celle de *Chézy*, correspondant à  $\beta = \gamma = 1/2$ . Le coefficient  $C$  de *Chézy* a été estimé par plusieurs auteurs (*Ganguillet et Kutter*, 1869; *Bazin*, 1897; *Powell*, 1950). Mais, la relation la plus largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts est celle de *Manning* (1891) en raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit. Dans cette relation,  $\beta = 2/3$  et  $\gamma = 1/2$  tandis que  $C = k = 1/n$  où  $n$  est le coefficient de rugosité appelé aussi coefficient de *Manning*. La même forme de la relation ayant été introduite indépendamment par *Strickler* (1923), cette relation est souvent appelée formule de *Manning-Strickler*. Il n'existe aucune méthode exacte qui permet d'évaluer  $n$ . Évaluer  $n$  revient à estimer la résistance de l'écoulement dans un canal donné, ce qui nécessite beaucoup d'expérience et de pratique. Notons cependant que *Hager* (1987) a pu lier, à travers une relation fortement intéressante, le coefficient  $k$  et la rugosité absolue  $\varepsilon$ . Cette relation sera utilisée dans notre développement théorique. Une autre relation qui servira de base à notre étude est celle de *Darcy-Weisbach*, initialement formulée par *Weisbach* (1845) et reprise par *Darcy* (1854) dans ses recherches expérimentales. Cette relation, développée pour les écoulements en conduites, se présente sous la forme  $J = f.V^2/(2gD)$  où  $f$  est le coefficient de frottement,  $D$  est le diamètre de la conduite et  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Le coefficient de frottement  $f$  dépend à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R$  et la nature du régime d'écoulement dans la conduite peut être examiné à travers la variation de  $f = \phi(R, \varepsilon/D)$ . Le graphique obtenu est communément appelé diagramme de *Stanton* (1914). Bien que la relation de *Darcy-Weisbach* ait été développée pour le cas des conduites, elle est cependant applicable aux canaux ouverts, en remplaçant  $D$  par le diamètre hydraulique  $D_h$ .

Dans le cas le plus général, l'écoulement est régi par une fonction de six paramètres que l'on peut écrire sous la forme  $\varphi(a, Q, J, \varepsilon, w, v) = 0$ , où :

- $a$  est une dimension linéaire quelconque liée à l'écoulement ou au profil géométrique du canal considéré. Cette dimension linéaire peut être à titre d'exemple la profondeur  $h$  de l'écoulement, la largeur  $b$  d'un canal rectangulaire ou la petite base d'un trapèze, le diamètre  $D$  d'une conduite circulaire,
- $w$  est le paramètre de forme ou rapport d'aspect du profil liquide en écoulement, correspondant à  $w = \eta = b/h$  pour le cas du canal

rectangulaire ou trapézoïdal, à  $w = \xi = h/D$  pour le cas du profil circulaire,

- $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

En pratique, trois catégories de problèmes peuvent se poser. La première catégorie répond à un besoin de dimensionnement et consiste à évaluer la dimension linéaire  $a$  à partir des valeurs connues des cinq autres paramètres régissant l'écoulement.

La relation fonctionnelle  $\varphi$  devient  $a = \phi_a(Q, J, \varepsilon, w, \nu)$ . En se référant à la bibliographie, il n'existe à l'heure actuelle aucune relation explicite susceptible de répondre à cette catégorie de problème lorsque l'écoulement est de nature lisse ou de transition. Ceci s'explique par l'impossibilité d'évaluer le nombre de Reynolds  $R$  puisque celui-ci dépend de la dimension linéaire  $a$  recherchée. Le problème peut être résolu en s'appuyant sur un procédé itératif. Dans le domaine rugueux, pour lequel  $a$  est indépendant de  $R$ , l'application de relations de type *Manning-Strickler* donne des résultats satisfaisants. La deuxième catégorie de problème consiste à évaluer le débit  $Q$  tel que  $Q = \varphi_Q(a, J, \varepsilon, w, \nu)$ . Ce problème trouve sa solution de manière explicite par la combinaison des relations de *Colebrook-White* et de *Darcy-Weisbach*, et ce quelle que soit la nature du régime d'écoulement. La troisième catégorie de problème est celle qui consiste à évaluer le gradient de la perte de charge tel que  $J = \varphi_J(a, Q, \varepsilon, w, \nu)$ . Pour ce cas, l'application des relations de type *Darcy-Weisbach* est suffisante.

Dans cette première partie de l'étude, nous proposons d'établir une relation généralisée susceptible de répondre à la première catégorie de problème ci-dessus exposés et pour toute nature du régime d'écoulement. Il s'agit en fait d'exprimer de manière pratique la relation fonctionnelle  $\varphi_a$ .

Cette généralisation est possible par la combinaison des relations de *Manning-Strickler* et de *Darcy-Weisbach*. Afin de faciliter la compréhension de la méthode, le seul cas de la conduite circulaire est exposé. La méthode est cependant extensible à tout profil géométrique.

## II. CALCUL DE LA DIMENSION LINEAIRE – DOMAINE TURBULENT RUGUEUX

En régime d'écoulement turbulent rugueux, la dimension linéaire d'un profil liquide ou géométrique de forme quelconque peut être déduite de la transformation de l'équation de *Manning – Strickler*. Celle-ci s'écrit :

$$V = kR_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1)$$

où  $V$  est la vitesse moyenne de l'écoulement,  $k$  est le coefficient de *Strickler*,  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $J$  est le gradient de la perte de charge correspondant également à la pente du canal considéré puisque l'écoulement est uniforme. En tenant compte du fait que  $V=Q/A$  et  $R_h=A/P$ , où  $A$  et  $P$

désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé, la relation (1) devient :

$$\frac{QP^{2/3}}{kA^{5/3}\sqrt{J}} = 1 \quad (2)$$

$A$  et  $P$  dépendent de la dimension linéaire  $a$  et l'on peut écrire que, quelle que soit la forme du profil géométrique,  $A=a^2A_1$  et  $P=aP_1$ . Les paramètres  $A_1$  et  $P_1$  sont adimensionnels et correspondent respectivement à l'aire de la section mouillée et au périmètre mouillé lorsque  $a$  est égal à l'unité. En tenant compte de ces considérations, la relation (2) devient:

$$a_r = \left[ \frac{Q}{k\sqrt{J}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (3)$$

L'indice  $r$  désigne le domaine rugueux. Étant donné que  $k = (8,2\varepsilon^{-1/6}\sqrt{g})$  (Hager, 1987) où  $g$  est l'accélération gravitationnelle, la relation (3) peut également s'écrire:

$$a_r = \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (4)$$

Ainsi, en posant  $\Gamma = \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8}$  et  $a_o = P_1^{1/4} / A_1^{5/8}$ , la relation (4) s'écrit plus

simplement :

$$a_r = \Gamma a_o \quad (5)$$

La relation (5) montre que toute dimension linéaire  $a_r$  s'exprime, dans le domaine rugueux, par le produit de deux fonctions  $\Gamma$  et  $a_o$ . La fonction  $\Gamma$  dépend de  $Q$ ,  $J$  et  $\varepsilon$ , mais ne dépend pas de la forme du profil géométrique. On notera que  $\Gamma$  a la dimension d'une longueur.

Le paramètre sans dimension  $a_o$  dépend exclusivement du profil liquide de l'écoulement, c'est à dire du paramètre de forme. Les expressions de  $a_o$  sont présentées au paragraphe 4, pour divers profils géométriques.

Dans le domaine rugueux, le nombre de Reynolds s'écrit  $R_r = VD_{hr}/\nu$ , où  $D_{hr} = 4A_r/P_r$  est le diamètre hydraulique et  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide. En tenant compte du fait que  $V = Q/A_r$ , le nombre de Reynolds devient  $R_r = 4Q/(P_r\nu)$ . Or, selon la relation (5),  $P_r = \Gamma P_o$  et le nombre de Reynolds peut s'écrire, quelle que soit la forme du profil géométrique considéré,  $R_r = 4Q/(\Gamma P_o\nu) = 4Q/(\Gamma a_o P_1 \nu)$ , soit :

$$R_r = \frac{4Q}{\Gamma \nu} \left( \frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{5/4} \approx \frac{8,805}{\nu} \left( \frac{Q^{5/3} \sqrt{g J}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/8} \left( \frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{5/4} \quad (6)$$

Notons que  $D_{hr}$  peut s'écrire  $D_{hr} = 4A_r / P_r = 4\Gamma^2 a_o^2 A_1 / (\Gamma a_o P_1) = 4\Gamma a_o A_1 / P_1$ , soit :

$$D_{hr} = 4\Gamma \left( \frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{3/4} = 1,817 \left( \frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{g J}} \right)^{3/8} \left( \frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{3/4} \quad (7)$$

On peut déduire des relations (5) et (7) que  $D_{ho} = 4(\sqrt{A_1} / P_1)^{3/4}$ .

Il ressort des relations (6) et (7) que la vitesse moyenne  $V_r = \nu R_r / D_{hr}$  d'un écoulement en régime turbulent rugueux est, quelle que soit la forme du canal considéré :

$$V_r = \left( \frac{8,2Q^{1/3} \sqrt{g J}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/4} \frac{A_1^{1/4}}{\sqrt{P_1}} \quad (8)$$

### III. CALCUL DE LA DIMENSION LINEAIRE - DOMAINE DE TRANSITION

Dans le domaine de transition, la dimension linéaire  $a$  dépend fortement de l'influence du nombre de Reynolds. La démarche que nous préconisons consiste à corriger la dimension linéaire  $a_r$ , calculée selon la relation (5) obtenue dans l'hypothèse d'un régime turbulent rugueux, par un facteur de correction  $\lambda$  qui dépend à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon/D_h$  et du nombre de Reynolds  $R$ . La relation (5) devrait s'écrire :

$$a = \lambda \Gamma a_o = \lambda a_r \quad (9)$$

On pourra noter que  $\lambda = 1$  lorsque le domaine est rugueux et  $\lambda > 1$  lorsque le domaine est de transition. Afin d'exprimer le facteur de transition  $\lambda$ , nous pouvons faire appel à l'équation de *Darcy-Weisbach*  $J = (f / D_h) Q^2 / (2gA^2)$ , où  $f$  est le coefficient de frottement. L'aire de la section mouillée  $A = a^2 A_1$  peut s'écrire en tenant compte de (9)  $A = \lambda^2 \Gamma^2 a_o^2 A_1$ , soit  $A = \lambda^2 \Gamma^2 A_o$  où  $A_o = a_o^2 A_1$ . De même,  $D_h$  peut s'écrire  $D_h = \lambda \Gamma D_{ho}$ .

En tenant compte de ces considérations, la relation de *Darcy-Weisbach* devient:

$$\lambda \Gamma = f^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2gA_o^2 D_{ho} J}} \quad (10)$$

Dans le domaine rugueux, la relation (10) s'écrit, avec  $\lambda = 1$  et  $f = f_r$  :

$$\Gamma = f_r^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2gA_o^2 D_{ho} J}} \quad (11)$$

La combinaison des relations (10) et (11) conduit à :

$$\lambda = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \quad (12)$$

Ainsi, dans le domaine de transition, la dimension linéaire  $a$  s'écrit en vertu de (9) et (12):

$$a = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5} a_r \quad (13)$$

ou bien :

$$a = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \left( \frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (14)$$

La relation (14) permet d'évaluer la dimension linéaire  $a$  aussi bien lorsque l'écoulement est dans le domaine rugueux ( $f \rightarrow f_r$ ) que dans le domaine de transition.

Le coefficient de frottement  $f$  peut être évalué par la formule connue de *Colebrook-White*, en s'appuyant cependant sur un procédé itératif. Mais, nous avons pu montrer que cette formule peut être remplacée avec une excellente approximation, par l'équation explicite :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right] \quad (15)$$

Par contre, le coefficient de frottement  $f_r$  peut être évalué de manière explicite par application de la formule de *Nikuradsé* :

$$f_r^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} \right] \quad (16)$$

où  $D_{hr}$  est le diamètre hydraulique lorsque l'écoulement est turbulent rugueux. Dans la relation (15), le nombre de Reynolds est  $R = 4Q / (P \nu)$ . Mais, en tenant compte du fait que  $P = \lambda P_r$ , on peut écrire  $R = R_r / \lambda$ , où  $R_r = 4Q / (P_r \nu)$  est le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement turbulent rugueux se produisant dans le même profil géométrique. De même, le diamètre hydraulique  $D_{hr}$  peut s'écrire  $D_h = \lambda D_{hr}$ . En tenant compte de ces considérations, la relation (15) devient:

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7 \lambda} + \frac{4,5 \lambda}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97 \lambda} \right] \quad (17)$$

Selon les relations (12), (16) et (17), l'évaluation de  $\lambda$  nécessite a priori un procédé itératif dont le principe est le suivant :

$$f_1^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7 \lambda_o} + \frac{4,5 \lambda_o}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97 \lambda_o} \right], \lambda_o = 1$$

$$f_2^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7 \lambda_1} + \frac{4,5 \lambda_1}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97 \lambda_1} \right], \lambda_1 = \left( \frac{f_1}{f_r} \right)^{1/5}$$

$$f_i^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7 \lambda_{i-1}} + \frac{4,5 \lambda_{i-1}}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97 \lambda_{i-1}} \right], \lambda_{i-1} = \left( \frac{f_{i-1}}{f_r} \right)^{1/5}, i = 1, 2, \dots, n$$

En évaluant le facteur de correction  $\lambda$  par le procédé itératif ci-dessus décrit, nous avons pu constater que  $(\lambda_3 - \lambda_1) \leq 0,01 \lambda_1$ . Ainsi, l'erreur relative commise sur l'évaluation de  $\lambda$ , en application de la relation (12) et pour  $f = f_1$ , ne dépasse pas 1%. Le facteur de correction  $\lambda$  peut donc être évalué par la relation explicite:

$$\lambda = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5} = \left[ \frac{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \quad (18)$$

Les paramètres  $R_r$  et  $D_{hr}$  sont donnés par les relations (6) et (7). La dimension linéaire  $a$  recherchée est, selon les relations (14) et (18) :

$$a = \left[ \frac{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \left( \frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (19)$$

#### IV. CALCUL DE LA DIMENSION LINEAIRE – DOMAINE PRATIQUEMENT LISSE

Dans le domaine pratiquement lisse, caractérisé par une rugosité absolue  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous proposons de corriger la valeur de la dimension linéaire  $a_r$  obtenue dans le domaine turbulent rugueux, par un coefficient  $\psi$  analogue au facteur de correction  $\lambda$ . La dimension linéaire recherchée s'écrit  $a = \psi a_r$ , soit en tenant compte de (4) :

$$a = \psi \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (20)$$

L'expression de  $\psi$  s'obtient de la même manière que celle ayant conduit à  $\lambda$  (paragraphe III ) et nous pouvons écrire :

$$\psi = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \quad (21)$$

La relation (20) devient alors :

$$a = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (22)$$

La forme de l'équation (22) est identique à celle de la relation (14) destinée au calcul de la dimension linéaire en régime de transition. Cependant, dans la relation (22), le coefficient de frottement  $f_r$  calculé en application de la formule de *Nikuradsé* n'a pas de sens puisque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Afin de lever cette difficulté, nous considérons un canal hypothétique de même conductivité que le canal réel, caractérisé par une rugosité relative  $\varepsilon/D_{hr} = 1,05 \cdot 10^{-2}$  en régime d'écoulement turbulent rugueux. Pour ce canal hypothétique, le coefficient de frottement  $f_r$  selon *Nikuradse* est  $f_r = (\pi/16)^2$  et la relation (21) devient :

$$f = (\pi/16)^2 \psi^5 \quad (23)$$

L'équation de *Colebrook – White* pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  devient, compte tenu de (23) :

$$\frac{\pi}{8} \psi^{5/2} \log \left( \frac{\psi^{5/2} R}{12,78} \right) = 1 \quad (24)$$

On peut montrer, comme dans le cas du régime de transition, que  $R=R_r / \psi$  et la relation (24) s'écrit :

$$\frac{\pi}{8} \psi^{5/2} \log \left( \frac{\psi^{3/2} R_r}{12,78} \right) = 1 \quad (25)$$

L'équation (25) est implicite en  $\psi$ , mais elle peut être remplacée avec une excellente approximation par :

$$\psi \sqrt{\log R_r} = 1,910 \quad (26)$$

La relation (26) permet le calcul explicite du facteur  $\psi$  avec une erreur relative maximale inférieure à 0,5% par rapport à la valeur obtenue par application de la relation (25).



Compte tenu de (21) et (26), la relation (22) devient :

$$a = \frac{1,910}{\sqrt{\log R_r}} \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} = \frac{1,910}{\sqrt{\log R_r}} a_r \quad (27)$$

Le paramètre  $R_r$  représente le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement turbulent rugueux dans le canal hypothétique. Les caractéristiques hydrauliques de cet l'écoulement sont données par les relations (6), (7) et (8), en tenant compte du fait que la rugosité relative est  $\varepsilon / D_{hr} = 1,05.10^{-2}$  :

$$V_r \cong 8,215(gJ\sqrt{Q})^{2/5} (\sqrt{A_1} / P_1)^{2/5} \quad (28)$$

$$D_{hr} \cong 1,395(Q/\sqrt{gJ})^{2/5} (\sqrt{A_1} / P_1)^{4/5} \quad (29)$$

$$R_r \cong \frac{11,465}{\nu} (gJQ^3)^{1/5} (\sqrt{A_1} / P_1)^{6/5} \quad (30)$$

Puisque  $D_{hr} = 1,395(Q/\sqrt{gJ})^{2/5} (\sqrt{A_1} / P_1)^{4/5} = 4a_r A_1 / P_1$ , alors :

$$a_r \cong 0,349 \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left( \frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \quad (31)$$

En tenant compte de la relation (31), l'équation (27) devient :

$$a \cong \frac{2}{3\sqrt{\log R_r}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left( \frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \quad (32)$$

La relation (32) permet ainsi d'évaluer la dimension linéaire  $a$  lorsque l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse.

Les relations (28) à (32) sont applicables à tout profil géométrique. Le paramètre de forme de celui-ci est contenu dans les variables  $A_1$  et  $P_1$  dont les expressions sont développées dans le paragraphe V.

## V. APPLICATIONS A QUELQUES PROFILS GEOMETRIQUES

### V.1. Profil rectangulaire

#### V.1.1. Expressions des paramètres $a_o$ , $A_1$ et $P_1$

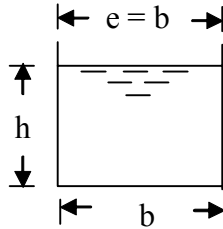


Figure 1 : Schéma de définition du profil rectangulaire

La figure 1 représente un canal de section droite rectangulaire symétrique caractérisé par sa largeur  $b$ . L'écoulement est de profondeur  $h$  et la largeur du plan d'eau ou largeur au miroir est  $e = b$ . Deux dimensions linéaires  $h$  et  $b$  caractérisent donc le profil rectangulaire. La section mouillée ainsi que le périmètre mouillé du profil représenté par la figure 1 s'écrivent respectivement  $A = bh$  et  $P = b + 2h$ . En considérant pour dimension linéaire  $a = b$ , ces relations deviennent  $A = b^2\eta$  et  $P = b(1 + 2\eta)$ , où  $\eta = h/b$  est le paramètre de forme de la section considérée. Ceci permet d'écrire :

$$A_1 = \eta \quad (33)$$

$$P_1 = 1 + 2\eta \quad (34)$$

Le paramètre de dimension  $b_o$  correspondant à  $b$  est par suite :

$$b_o = P_1^{1/4} / A_1^{5/8} = (1 + 2\eta)^{1/4} / \eta^{5/8} \quad (35)$$

Le paramètre de dimension  $h_o$  de la profondeur  $h$  est :

$$h_o = \eta b_o = \eta^{3/8} (1 + 2\eta)^{1/4} \quad (36)$$

Pour le diamètre hydraulique  $D_h$ , le paramètre de dimension  $D_{ho}$  est :

$$D_{ho} = 4(\sqrt{A_1} / P_1)^{3/4} = 4[\sqrt{\eta} / (1 + 2\eta)]^{3/4} \quad (37)$$

Pour la section mouillée  $A$ , le paramètre de dimension  $A_o$  est :

$$A_o = a_o^2 A_1 = \sqrt{P_1} / A_1^{1/4} = \sqrt{1 + 2\eta} / \eta^{1/4} \quad (38)$$

On notera que  $A_o^{3/2} D_{ho} = 4$ .

Le paramètre de dimension  $P_o$  du périmètre mouillé  $P$  est :

$$P_o = a_o P_1 = (P_1 / \sqrt{A_1})^{5/4} = [(1 + 2\eta) / \sqrt{\eta}]^{5/4} \quad (39)$$

### V.1.2. Conditions optimales

La représentation graphique des relations (37), (38) et (39) montre que le paramètre de dimension  $D_{ho}$  présente un maximum, tandis que  $A_o$  et  $P_o$  présentent un minimum pour une valeur optimale du paramètre de forme  $\eta = \eta_{opt}$ . Cette valeur peut être aisément déterminée en égalant à zéro les dérivées  $dD_{ho}/d\eta$ ,  $dA_o/d\eta$  et  $dP_o/d\eta$ , soit :

$$\eta_{opt}=1/2 \tag{40}$$

Pour la valeur particulière de  $\eta = \eta_{opt} = 1/2$ , les relations (35) à (39) indiquent respectivement que  $b_o = 2^{7/8} \approx 1,834$ ,  $h_o = b_o/2 \approx 0,917$ ,  $D_{ho} \approx 1,834$  et  $A_o \approx 1,682$ ,  $P_o \approx 3,668$ . On notera par ailleurs que  $D_{ho} = A_o$  pour  $\eta \approx 1,062$ . La valeur exacte de  $\eta$  peut être obtenue en résolvant l'équation du second ordre  $(1+2\eta)^2 = 4^{8/5} \eta$  issue de l'égalité des relations (37) et (38).

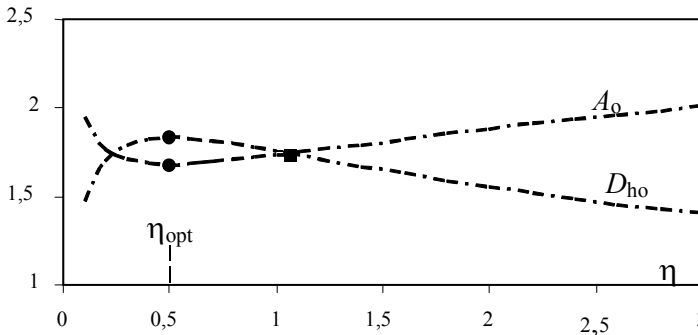


Figure 2 : Variation de  $D_{ho}$  et  $A_o$  en fonction de  $\eta$  selon les relations (37) et (38)

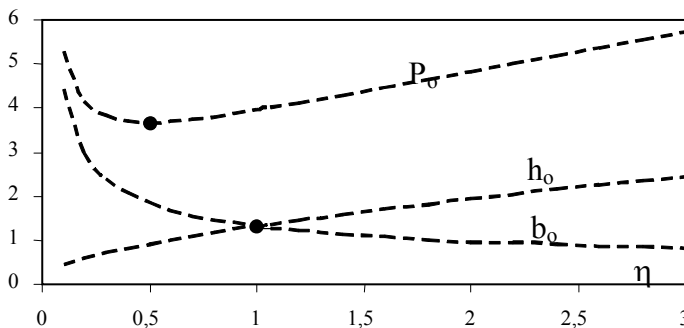


Figure 3 : Variation de  $b_o$ ,  $h_o$  et  $P_o$  en fonction de  $\eta$  selon les relations (35), (36) et (39)

### V.1.3. Calcul de la dimension linéaire en régime turbulent rugueux

En choisissant de déterminer la dimension linéaire  $b_r$  en régime turbulent rugueux, la combinaison des relations (4), (33) et (34) permet d'écrire :

$$b_r = \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{(1+2\eta)^{1/4}}{\eta^{5/8}} \quad (41)$$

De même que  $h_r = \eta b_r$ , conduit à :

$$h_r = \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} (1+2\eta)^{1/4} \eta^{3/8} \quad (42)$$

### V.1.4. Calcul de la dimension linéaire en régime de transition

Lorsque c'est la dimension linéaire  $a = b$  qui est recherchée, la combinaison des relations (19), (33) et (34) mène à :

$$b = \left[ \frac{\log\left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97}\right)}{\log\left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7}\right)} \right]^{-2/5} \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{(1+2\eta)^{1/4}}{\eta^{5/8}} \quad (43)$$

De même, la profondeur  $h = \eta b$  de l'écoulement en régime de transition s'exprime par :

$$h = \left[ \frac{\log\left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97}\right)}{\log\left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7}\right)} \right]^{-2/5} \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} (1+2\eta)^{1/4} \eta^{3/8} \quad (44)$$

Le diamètre hydraulique  $R_r$  et le nombre de Reynolds  $D_{hr}$  sont évalués à partir de la combinaison des relations (6), (7), (33) et (34), soit :

$$R_r = \frac{4Q}{\Gamma\nu} \left( \frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{5/4} \approx \frac{8,805}{\nu} \left( \frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/8} \left( \frac{\sqrt{\eta}}{1+2\eta} \right)^{5/4} \quad (45)$$

$$D_{hr} = 4\Gamma \left( \frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{3/4} = 1,817 \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \left( \frac{\sqrt{\eta}}{1+2\eta} \right)^{3/4} \quad (46)$$

### V.1.5. Calcul de la dimension linéaire en régime pratiquement lisse

Lorsque c'est la dimension linéaire  $a = b$  qui est recherchée, la combinaison des relations (27), (33) et (34) permet d'écrire :

$$b = \frac{2}{3\sqrt{\log R_r}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left( \frac{1+2\eta}{\eta^3} \right)^{1/5} \quad (47)$$

La profondeur  $h = \eta b$  en régime pratiquement lisse est donc :

$$h = \frac{2}{3\sqrt{\log R_r}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} [\eta^2 (1+2\eta)]^{1/5} \quad (48)$$

Le nombre de Reynolds figurant dans les relations (47) et (48) s'obtient en combinant les équations (30), (35) et (36), soit :

$$R_r \cong \frac{11,465}{\nu} (gJQ^3)^{1/5} [\sqrt{\eta} / (1+2\eta)]^{6/5} \quad (49)$$

## V.2. Profil fermé de forme carrée entièrement occupé par l'écoulement

### V.2.1. Expressions des paramètres $a_o$ , $A_1$ et $P_1$

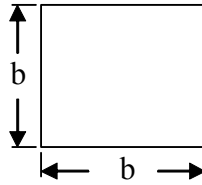


Figure 4 : Schéma de définition du profil de forme carrée

La figure 4 représente un canal fermé de forme carrée de côté  $b$ . Une seule dimension linéaire, soit  $b$ , caractérise donc ce profil. La section mouillée ainsi que le périmètre mouillé s'écrivent respectivement  $A = b^2$  et  $P = 4b$ . Ceci permet d'écrire :

$$A_1 = 1 \quad (50)$$

$$P_1 = 4 \quad (51)$$

Le paramètre de dimension  $b_o$  correspondant à  $b$  est par suite :

$$b_o = P_1^{1/4} / A_1^{5/8} = (4)^{1/4} = \sqrt{2} \quad (52)$$

Pour le diamètre hydraulique  $D_h$ , le paramètre de dimension  $D_{ho}$  est :

$$D_{ho} = 4(\sqrt{A_1} / P_1)^{3/4} = 4(1/4)^{3/4} = \sqrt{2} \quad (53)$$

Pour la section mouillée  $A$ , le paramètre de dimension  $A_o$  est :

$$A_o = a_o^2 A_1 = \sqrt{P_1} / A_1^{1/4} = \sqrt{4} = 2 \quad (54)$$

On peut noter que l'égalité  $A_o^{3/2} D_{ho} = 4$  est bien vérifiée.

Le paramètre de dimension  $P_o$  du périmètre mouillé  $P$  est :

$$P_o = a_o P_1 = (P_1 / \sqrt{A_1})^{5/4} = (4)^{5/4} = 4\sqrt{2} \quad (55)$$

Les relations (52) à (55) montrent que les paramètres de dimension se rapportant au profil fermé de forme carrée sont constants.

### V.2.2. Calcul de la dimension linéaire en régime turbulent rugueux

La dimension linéaire  $b_r$  en régime turbulent rugueux s'obtient par la combinaison des relations (4), (48) et (49) :

$$b_r = \sqrt{2} \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \quad (56)$$

### V.2.3. Calcul de la dimension linéaire en régime de transition

La dimension linéaire  $b$  en régime de transition est donnée par la combinaison des relations (19), (50) et (51) :

$$b = \sqrt{2} \left[ \frac{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \quad (57)$$

Avec  $D_{hr} = 4A/P = b_r$ , soit :

$$D_{hr} = b_r = \sqrt{2} \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \quad (58)$$

Le nombre de Reynolds  $R_r$  est donné par les relations (7), (50) et (51) :

$$R_r \approx \frac{1,556}{\nu} \left( \frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/8} \quad (59)$$

### V.2.4. Calcul de la dimension linéaire en régime pratiquement lisse

Dans le domaine pratiquement lisse, la dimension linéaire est  $b = \psi b_r$ , où  $b_r$  est la dimension linéaire du canal hypothétique de rugosité relative égale à  $1,05 \cdot 10^{-2}$ . En tenant compte des relations (50) et (51), l'équation (32) permet d'écrire :

$$b \cong \frac{0,879}{\sqrt{\log R_r}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \quad (60)$$

Le nombre de Reynolds  $R_r$  de la relation (60) et qui caractérise l'écoulement turbulent rugueux dans le canal hypothétique est, en vertu des relations (30), (50) et (51)

$$R_r \cong \frac{2,172}{\nu} (gJQ^3)^{1/5} \quad (61)$$

Selon les relations (31), (50) et (52), la dimension linéaire  $b_r$  du profil hypothétique est :

$$b_r \cong 0,46 \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \quad (62)$$

### V.3. Profil circulaire partiellement occupé par l'écoulement

#### V.3.1. Expressions des paramètres $a_0$ , $A_1$ et $P_1$

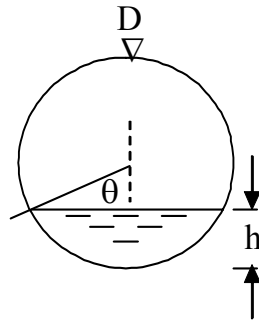


Figure 5 : Schéma de définition du profil circulaire

La figure 5 montre un profil circulaire de diamètre  $D$  partiellement occupé par un écoulement de profondeur  $h$ . Le segment circulaire est défini par le paramètre de forme  $\xi = h/D$ . Celui-ci est lié au demi angle au centre  $\theta$  par la relation  $\theta = \cos^{-1}(1 - 2\xi)$ . Ce profil est donc défini par deux dimensions linéaires  $h$  et  $D$ . L'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le périmètre mouillé  $P$  s'écrivent respectivement  $A = D^2 (\theta - \sin\theta \cos\theta)/4$  et  $P = D\theta$ , où  $\theta$  est en

radians. En considérant pour dimension linéaire  $a = D$ , on peut ainsi écrire que:

$$A_1 = (\theta - \sin\theta \cos\theta)/4 \quad (63)$$

$$P_1 = \theta \quad (64)$$

Le paramètre de dimension  $D_o$  du diamètre  $D$  est :

$$D_o = P_1^{1/4}/A_1^{5/8} = \theta^{1/4}/[(\theta - \sin\theta \cos\theta)/4]^{5/8} \quad (65)$$

Le paramètre de dimension  $h_o$  de la profondeur  $h$  est :

$$h_o = \xi D_o = \xi \theta^{1/4}/[(\theta - \sin\theta \cos\theta)/4]^{5/8} \quad (66)$$

Pour le diamètre hydraulique  $D_h$ , le paramètre de dimension  $D_{ho}$  est :

$$D_{ho} = 4(\sqrt{A_1} / P_1)^{3/4} = 2^{5/4}(\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta} / \theta)^{3/4} \quad (67)$$

Pour la section mouillée  $A$ , le paramètre de dimension  $A_o$  est :

$$A_o = a_o^2 A_1 = \sqrt{P_1} / A_1^{1/4} = \sqrt{2\theta} / (\theta - \sin\theta \cos\theta)^{1/4} \quad (68)$$

Le paramètre de dimension  $P_o$  du périmètre mouillé  $P$  est :

$$P_o = a_o P_1 = (P_1 / \sqrt{A_1})^{5/4} = (2\theta / \sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta})^{5/4} \quad (69)$$

### V.3.2. Conditions optimales

La représentation graphique (figure 6) des relations (67), (68) montre que le paramètre de dimension  $D_{ho}$  présente un maximum, tandis que  $A_o$  présentent un minium pour une valeur optimale du paramètre de forme  $\xi = \xi_{opt}$ . Cette valeur peut être aisément déterminée en égalant à zéro les dérivées  $dD_{ho}/d\xi$  et  $dA_o/d\xi$ , soit :

$$\xi = \xi_{opt} = 1/2 \quad (70)$$

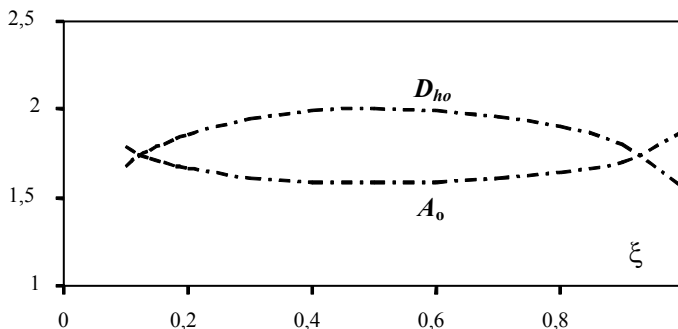


Figure.6 : Variation de  $D_{ho}$  et  $A_o$  en fonction du paramètre de forme  $\xi$  selon les relations (67) et (68)



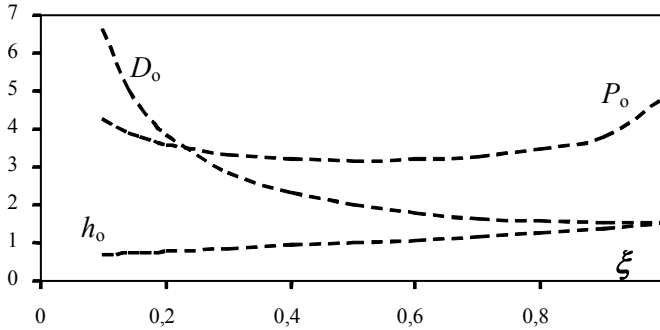


Figure 7 : Variation de  $D_o$ ,  $h_o$  et  $P_o$  en fonction du paramètre de forme  $\xi$  selon les relations (65), (66) et (69)

La figure 7 montre la variation de  $D_o$ ,  $h_o$  et  $P_o$  en fonction du paramètre de forme  $\xi$ . On peut observer que  $D_o$  et  $P_o$  présentent un minimum. Le calcul indique que le minimum de  $D_o$  est atteint pour  $\xi = \xi_{opt} \approx 0,938$ . Cette valeur peut être déterminée en égalant à zéro la dérivée  $dD_o/d\xi$ . La relation (65) permet d'écrire que  $dD_o/d\xi = d(P_1^{1/4}/A_1^{5/8})/d\xi = 0$ , ou bien, en tenant compte de (63) et (64) :

$$A_1 \frac{dP_1}{d\xi} - \frac{5}{2} P_1 \frac{dA_1}{d\xi} = 0 \Leftrightarrow A_1 \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{5}{8} P_1 \frac{d\theta}{d\xi} (1 - \cos 2\theta) = 0$$

$$\text{Soit : } 4A_1 = \frac{5}{2} P_1 (1 - \cos 2\theta)$$

$$\text{Ainsi : } \frac{5}{2} \theta (\cos 2\theta - \frac{3}{5}) = \sin \theta \cos \theta$$

La solution de cette dernière relation correspond à  $\theta = 2,639$  radians ou bien à  $\xi = (1 - \cos \theta)/2 \approx 0,938$ .

En ce qui concerne du minimum de  $P_o$ , la relation (69) indique que

$$dP_o / d\xi = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\xi} (P_1 / \sqrt{A_1}) = 0. \text{ En tenant compte des relations (63) et (64),}$$

on peut aisément montrer que:

$$4A_1 = \frac{\theta}{2} (1 - \cos 2\theta), \text{ ou bien } \frac{\theta}{2} (1 + \cos 2\theta) - \sin \theta \cos \theta = 0. \text{ La solution de}$$

cette dernière équation correspond à  $\theta = 1,5708$  radians, soit  $\xi = 1/2$ .

Le calcul montre que :

$$P_o (\xi = 1/2) = P_o \text{ min.} = 3,154, D_{ho} (\xi = 1/2) = D_{ho} \text{ max.} = 2,008, A_o (\xi = 1/2) = A_o \text{ min.} = 1,583, D_o (\xi = 0,938) = D_o \text{ min.} = 1,506.$$

### V.3.3. Calcul de la dimension linéaire en régime turbulent rugueux

Lorsque c'est la dimension linéaire  $D_r$  qui est recherchée, la combinaison des relations (4), (63) et (64) permet d'écrire :

$$D_r = \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{\theta_1^{1/4}}{[(\theta - \sin\theta \cos\theta)/4]^{5/8}}$$

ou bien :

$$D_r = 1,08 \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{\theta^{1/4}}{(\theta - \sin\theta \cos\theta)^{5/8}} \quad (71)$$

En choisissant pour dimension linéaire  $a = h_r$ , la relation (71) permet d'écrire, en considérant que  $h_r = \zeta D_r$  :

$$h_r = 1,08 \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{\zeta\theta^{1/4}}{(\theta - \sin\theta \cos\theta)^{5/8}} \quad (72)$$

Les relations (71) et (72) permettent le calcul explicite de  $D_r$  et  $h_r$ , dans le domaine turbulent rugueux, à partir de la valeur imposée du paramètre de forme  $\zeta$ . Mais, pour évaluer  $\zeta$ , les relations (71) et (72) ne sont pas pratiques à appliquer et elles peuvent être remplacées avec une excellente approximation par l'équation :

$$\left[ \frac{8}{5} \sin(90^\circ \xi) \right]^2 = \frac{q_r}{\sqrt{J}} \left( \frac{\varepsilon}{D_r} \right)^{1/6} \quad (73)$$

où  $q_r = Q/\sqrt{gD_r^5}$  est le débit relatif et  $q_r/\sqrt{J}$  est la conductivité relative de la conduite.

### V.3.4. Calcul de la dimension linéaire en régime de transition

Lorsque c'est le diamètre  $D$  de la conduite qui est recherché ( $a = D$ ), la relation (19) devient en tenant compte de (63) et (64) :

$$D = 1,08 \left[ \frac{\log \left( \frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left( \frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{\theta^{1/4}}{(\theta - \sin\theta \cos\theta)^{5/8}} \quad (74)$$

La relation (74) permet à la fois le calcul du diamètre de la conduite circulaire dans les domaines de transition et turbulent rugueux ( $f \rightarrow f_r$ ), aussi bien lorsque cette conduite est pleine ( $\theta = \pi$ ) ou partiellement occupée par l'écoulement.

La profondeur  $h = \xi D$  en régime de transition, s'exprime alors par :

$$h = 1,08 \left[ \frac{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \left( \frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{\xi \theta^{1/4}}{(\theta - \sin \theta \cos \theta)^{5/8}} \quad (75)$$

Le nombre de Reynolds  $R_r$  et le diamètre hydraulique  $D_{hr}$  figurant dans les relations (74) et (75) s'obtiennent en combinant les équations (6), (7), (63) et (64) :

$$R_r \approx \frac{3,702}{\nu} \left( \frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/8} \left( \frac{\sqrt{\theta - \sin \theta \cos \theta}}{\theta} \right)^{5/4} \quad (76)$$

$$D_{hr} \approx 1,08 \left( \frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \left( \frac{\sqrt{\theta - \sin \theta \cos \theta}}{\theta} \right)^{3/4} \quad (77)$$

La vitesse moyenne de l'écoulement dans la conduite circulaire, lorsque le régime est turbulent rugueux se déduit des relations (8), (63) et (64) :

$$V_r = 3,426 \left( \frac{Q^{1/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/4} \frac{(\theta - \sin \theta \cos \theta)^{1/4}}{\sqrt{\theta}} \quad (78)$$

### V.3.5. Calcul de la dimension linéaire en régime pratiquement lisse

Le diamètre  $D$  de la conduite circulaire, en régime pratiquement lisse, peut être obtenu en ayant recours aux relations (32), (63) et (64) :

$$D \cong \frac{2}{3\sqrt{\log R_r}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \frac{(64\theta)^{1/5}}{(\theta - \sin \theta \cos \theta)^{3/5}} \quad (79)$$

La relation (79) traduit en fait que le diamètre  $D$  est  $D = \psi D_r$ , où  $\psi$  est le facteur de correction de la dimension linéaire lié au nombre de Reynolds  $R_r$  par la relation (26). Ce nombre de Reynolds caractérise l'écoulement dans la conduite hypothétique de diamètre  $D_r$  dont l'expression peut être obtenue par la combinaison des relations (31), (63) et (64), soit :

$$D_r \cong 0,349 \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \frac{(64\theta)^{1/5}}{(\theta - \sin \theta \cos \theta)^{3/5}} \quad (80)$$

Le nombre de Reynolds  $R_r$  est donné par les relations (30), (63) et (64) :

$$R_r \cong \frac{11,465}{\nu} (gJQ^3)^{1/5} \left( \frac{\sqrt{\theta - \sin \theta \cos \theta}}{2\theta} \right)^{6/5}$$

ou bien :

$$R_r \cong \frac{5}{\nu} (gJQ^3)^{1/5} \left( \frac{\sqrt{\theta - \sin \theta \cos \theta}}{\theta} \right)^{6/5} \quad (81)$$

La conduite hypothétique est caractérisée également par un diamètre hydraulique  $D_{hr}$  dont l'expression peut être déterminée par la combinaison des relations (29), (63) et (64) :

$$D_{hr} \cong 1,395 (Q / \sqrt{gJ})^{2/5} \left( \frac{\sqrt{\theta - \sin \theta \cos \theta}}{2\theta} \right)^{4/5}$$

ou bien :

$$D_{hr} \cong \frac{4}{5} (Q / \sqrt{gJ})^{2/5} \left( \frac{\sqrt{\theta - \sin \theta \cos \theta}}{\theta} \right)^{4/5} \quad (82)$$

#### V.4. Profil circulaire entièrement occupé par l'écoulement

##### V.4.1. Expressions des paramètres $a_0$ , $A_1$ et $P_1$

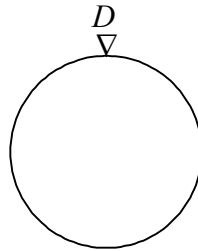


Figure 8 : Conduite circulaire entièrement occupée par l'écoulement

Le profil est défini par la seule dimension linéaire  $D$ . Les relations des paramètres  $A_1$ ,  $P_1$ ,  $D_o$ ,  $D_{ho}$ ,  $A_o$  et  $P_o$  se déduisent de celles du profil circulaire partiellement occupé par l'écoulement pour lequel  $\theta = \pi$ . Ainsi :

$$A_1 = \pi/4 \quad (83)$$

$$P_1 = \pi \quad (84)$$

$$D_o = 4^{5/8} / \pi^{3/8} \approx 1,548 \quad (85)$$

$$D_{ho} = 2^{5/4} / \pi^{3/8} = D_o \approx 1,548 \quad (86)$$

$$A_o = \sqrt{2\pi}^{1/4} \approx 1,883 \quad (87)$$

$$P_o = (2\pi / \sqrt{\pi})^{5/4} = (2\sqrt{\pi})^{5/4} \approx 4,864 \quad (88)$$

Ainsi, les paramètres de dimension du profil circulaire entièrement occupé par l'écoulement sont constants.

On pourra vérifier, comme dans le cas des autres profils, que  $A_o^{3/2} D_{ho} = 4$ .

#### V.4.2. Calcul de la dimension linéaire en régime turbulent rugueux

Le diamètre  $D_r$  en régime d'écoulement turbulent rugueux est donnée par la relation (71) pour laquelle  $\theta = \pi$ , soit :

$$D_r = 0,703 \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \quad (89)$$

La relation approchée (73) conduit au même résultat pour  $\xi = 1$  ( $\theta = \pi$ ).

Le nombre de Reynolds qui caractérise l'écoulement turbulent rugueux dans la conduite circulaire entièrement occupée ( $\theta = \pi$ ), s'obtient par la relation (76):

$$R_r = \frac{1,81}{\nu} \left( \frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/8} \quad (90)$$

La vitesse moyenne de l'écoulement est selon (78) et pour  $\theta = \pi$ :

$$V_r = 2,573 \left( \frac{Q^{1/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/4} \quad (91)$$

#### V.4.3. Calcul de la dimension linéaire en régime de transition

Le diamètre  $D$  de la conduite circulaire entièrement occupée par un écoulement en régime de transition, est défini par (74) pour  $\theta = \pi$ :

$$D = 0,703 \left[ \frac{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left( \frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \quad (92)$$

Le diamètre hydraulique  $D_{hr} = D_r$  ainsi que le nombre de Reynolds  $R_r$  qui figurent dans la relation (92) répondent respectivement aux expressions (89) et (90).

#### V.4.4. Calcul de la dimension linéaire en régime pratiquement lisse

Le diamètre  $D$  de la conduite circulaire entièrement occupée par un écoulement en régime pratiquement lisse est défini par la relation (79) pour laquelle  $\theta = \pi$  :

$$D \cong \frac{0,969}{\sqrt{\log R_r}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \quad (93)$$

La relation (93) traduit en fait l'égalité  $D = \psi D_r$ , où  $\psi$  est le coefficient de correction de la dimension linéaire lié au nombre de Reynolds  $R_r$  par l'équation (26). Ce nombre de Reynolds caractérise l'écoulement turbulent rugueux dans la conduite hypothétique de diamètre  $D_r$  défini par (80) pour  $\theta = \pi$  :

$$D_r \cong 0,507 \left( \frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \quad (94)$$

$$R_r \cong \frac{2,511}{\nu} (gJQ^3)^{1/5} \quad (95)$$

**Exemple d'application 1 :** Soit à déterminer, sous un gradient de perte de charge  $J = 6,8 \cdot 10^{-6}$ , le diamètre  $D$  d'une conduite circulaire partiellement occupée par un écoulement d'eau de débit  $Q = 20$  l/s et caractérisée par une viscosité cinématique  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2\text{sec}^{-1}$ . Le taux de remplissage de la conduite est  $\zeta = h / D = 0,40$  et la rugosité absolue des parois est  $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

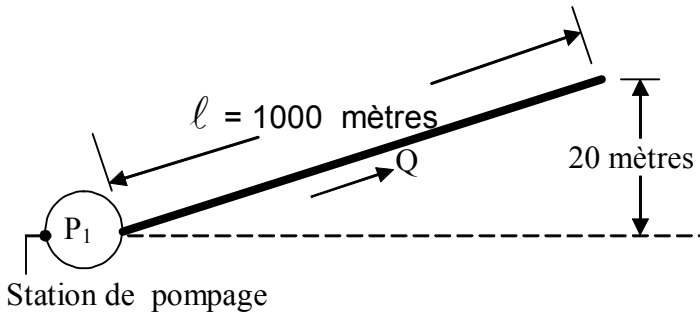
Nous supposons, dans un premier temps, que l'écoulement est dans le domaine rugueux ( $\lambda = 1$ ) et l'application de la relation (71) permet le calcul de  $D_r$ , soit  $D_r \approx 0,93 \text{ m}$  ( $\theta = 1,369$  radians). Nous pouvons vérifier, à partir de cette valeur de  $D_r$ , que l'application de la relation approchée (73) mène à  $\zeta \approx 0,40$ . Le diamètre hydraulique  $D_{hr}$  dans le domaine rugueux est selon (77)  $D_{hr} = 0,797 \text{ m}$ , soit. Le nombre de Reynolds est selon (76)  $R_r \approx 6276$ . En application de la relation (18), le coefficient de correction de la dimension linéaire de régime de transition est  $\lambda \approx 1,144$ , ce qui confirme que l'écoulement est dans le domaine de transition puisque  $\lambda > 1$ . Le diamètre recherché  $D$  de la conduite est alors  $D = \lambda D_r \approx 1,065 \text{ m}$ .

**Exemple d'application 2 :** Soit à déterminer, sous un gradient de perte de charge  $J = 10^{-3}$ , le diamètre  $D$  d'une conduite lisse pleine ( $\theta = \pi$ ) véhiculant de l'eau caractérisée par une viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2\text{sec}^{-1}$  et par un débit  $Q = 300$  l/s.

Le nombre de Reynolds  $R_r$  qui caractérise l'écoulement turbulent rugueux dans la conduite hypothétique est, en application de (95),  $R_r \approx 4,835 \cdot 10^5$ . Le coefficient de correction de la dimension linéaire en régime pratiquement lisse est, selon (26),  $\psi = 0,801$ . Le diamètre  $D_r$  de la conduite hypothétique est en

application de la relation (94),  $D_r \approx 0,79$  m. Par suite, la dimension linéaire  $D$  recherchée est  $D = \psi D_r = 0,632$  m. Ce résultat aurait pu être obtenu par application de la relation (93).

**Exemple d'application 3 :** Un dernier exemple pratique est présenté permettant de comparer la méthode décrite dans cet article et la méthode classique qui demeure encore en vigueur.



La pression à la sortie d'une station de pompage est  $P_1 = 5$  bars. De l'eau, de masse volumique  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/sec et de débit  $Q = 400$  m<sup>3</sup>/heure, doit être acheminée à travers une conduite circulaire rectiligne de diamètre  $D$  et de rugosité absolue  $\varepsilon = 0,1$  millimètre, sur une longueur  $l = 1000$  mètres et sur une hauteur de 20 mètres. L'accélération de la pesanteur est  $g = 10$  m/sec<sup>2</sup>.

Parmi les diamètres commerciaux ci-dessous indiqués, quel est le plus petit diamètre  $D$  pouvant satisfaire aux conditions du problème ?

Diamètres commerciaux (en millimètres) 60 – 80 – 100 – 125 – 150 – 200 – 250 – 300 – etc...
--

#### RESOLUTION PAR LA METHODE CLASSIQUE

Pour résoudre ce type de problème, la méthode classique fait d'abord appel à l'équation de *Darcy-Weisbach*  $J = fQ^2 / (2gA^2D_h)$  dans laquelle  $D_h = D$  et  $A = \pi D^2 / 4$  puisque la conduite est pleine. La perte de charge linéaire étant  $\Delta h = J\ell$ , la relation de *Darcy - Weisbach* devient  $\Delta h = J\ell = [8Q^2\ell / (g\pi^2)](f/D^5)$ . Les données du problème montre que la quantité se trouvant entre crochets dans la relation précédente est environ égale à l'unité, soit  $\Delta h = f\ell D^5$ . La méthode classique fait ensuite appel à la formule de *Colebrook - White*

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right] \text{ et évalue le coefficient de frottement } f \text{ par un}$$

procédé itératif à partir des valeurs données du nombre de *Reynolds*  $R$  et de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . Le nombre de *Reynolds* s'écrit dans le cas présent  $R = 4Q/(\pi D v)$ .

En écrivant l'équation de *Bernoulli* entre la section initiale de la conduite à la sortie immédiate de la station et la section de l'extrémité aval de la conduite, on peut déduire que  $\Delta h = 30$  mètres de colonne d'eau. Il s'agit donc d'évaluer le plus petit diamètre  $D$ , parmi ceux proposés, de telle sorte que la perte de charge que ce diamètre occasionne soit inférieure ou à la limite égale à 30 mètres de colonne d'eau. Le tableau suivant regroupe les calculs exécutés selon la démarche ci-dessus décrite.

N°	D (mm)	$R = 4Q/(\pi Dv) =$ 1,41471.105/D	f Colebrook- White	f Relation (15)	Ecart en %	$\Delta h = f/D^5$ (m)
01	60	$2,35785 \cdot 10^6$	0,0224163	0,022460	0,2	28827,5
02	80	$1,768388 \cdot 10^6$	0,0208966	0,0209558	0,28	6377,15
03	100	$1,41471 \cdot 10^6$	0,019855	0,0199283	0,37	1985,5
04	125	$1,131768 \cdot 10^6$	0,0189320	0,0190210	0,47	620,365
05	150	$9,4314 \cdot 10^5$	0,0182689	0,018371	0,56	240,578
06	200	$7,07355 \cdot 10^5$	0,0174009	0,0175215	0,7	54,378
07	250	$5,65884 \cdot 10^5$	0,0168926	0,017023	0,77	17,298
08	300	$4,7157 \cdot 10^5$	0,0165946	0,016728	0,8	6,829

### DISCUSSION DES RESULTATS

Au regard des résultats regroupés dans le tableau précédent, le plus petit diamètre  $D$  occasionnant une perte de charge linéaire  $\Delta h$  inférieure à 30 mètres de colonne d'eau est donc  $D = 250$  mm. Les résultats obtenus ont permis également de comparer les valeurs calculées du coefficient de frottement  $f$  par application de la relation de *Colebrook - White* et la relation (15) que nous avons proposée. L'écart maximal observé reste inférieur à 1%, ce qui permet de conclure à la fiabilité de la relation approchée (15). Celle-ci permet de manière explicite l'évaluation du coefficient  $f$ .

### RESOLUTION PAR LA METHODE ACTUELLE

La méthode actuelle décrite par cet article préconise le calcul du diamètre  $D$  de la conduite par application de la relation (13) pour  $a = D$ . Ainsi :

$$D = \left( \frac{f}{f_r} \right)^{1/5} D_r$$



Le coefficient de frottement  $f$  est évalué par application de la relation (15) pour  $R = R_r$ , comme si l'écoulement était turbulent rugueux. Sous cette hypothèse, le diamètre  $D_r$  est, selon la relation (89) :

$$D_r = 0,703 \left( \frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} = 0,218m ,$$

le gradient de la perte de charge étant  $J = \Delta h / \ell = 30 / 1000 = 0,03$ . Le nombre de Reynolds  $R_r = 4Q / (\pi D_r \nu) = 4.400(3600. \pi \cdot 0,218. 10^{-6}) = 6,4856187. 10^5$ .

La rugosité relative, dans l'hypothèse d'un régime turbulent rugueux, est  $\varepsilon / D_r = 0,1 / 218 = 4,587. 10^{-4}$ . Le couple de valeurs ( $R_r$ ,  $\varepsilon / D_r$ ) permet d'évaluer de manière explicite le coefficient de frottement  $f$  par application de la relation (15), soit  $f = 0,017185$ . Le coefficient de frottement  $f_r$  est calculé selon la

formule de *Nikuradse*,  $f_r^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon / D_r}{3,7} \right]$ , soit  $f_r = 0,01638$ .

Ainsi,  $D = 0,218. (0,017185 / 0,01638)^{1/5} = 0,220$  m. Ce diamètre occasionne exactement une perte de charge  $\Delta h = J \ell = 30$  mètres de colonne d'eau. Mais comme ce diamètre ne figure pas dans le tableau des diamètres commercialisés, il faut alors adopter le diamètre qui lui est directement supérieur, c'est à dire  $D = 250$  mm.

#### V.5. Canal de forme trapézoïdale - Calcul de la dimension linéaire dans le domaine turbulent rugueux

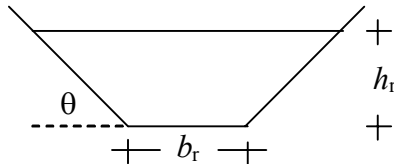


Figure 9 : Canal de forme trapézoïdale

Le canal de forme trapézoïdale est caractérisé par sa base  $b_r$  ainsi que par l'angle d'inclinaison  $\theta$  de ses parois par rapport à l'horizontale et tel que  $\cotg \theta = m$  (figure 9). L'écoulement est défini par sa profondeur  $h_r$  où l'indice  $r$  désigne le domaine turbulent rugueux. Deux dimensions linéaires,  $b_r$  et  $h_r$  sont donc caractéristiques du canal. Si l'on recherche la dimension linéaire  $b_r$ , l'aire de la section mouillée ainsi que le périmètre mouillé doivent être mis sous la forme  $A_r = b_r^2 \eta (1 + m \eta)$  où  $\eta = h_r / b_r$ ,  $P_r = b_r (1 + 2\eta \sqrt{1 + m^2})$ . Ceci permet d'écrire que les paramètres adimensionnels  $A_1$  et  $P_1$  sont tels que :

$$A_1 = \eta(1 + m\eta) \quad (96)$$

$$P_1 = (1 + 2\eta\sqrt{1+m^2}) \quad (97)$$

La relation (4) devient, avec  $a_r = b_r$  :

$$b_r = 0,454 \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{(1 + 2\eta\sqrt{1+m^2})^{1/4}}{[\eta(1 + m\eta)]^{5/8}} \quad (98)$$

La profondeur  $h_r = \eta b_r$  s'écrit donc :

$$h_r = 0,454 \left[ \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{\eta(1 + 2\eta\sqrt{1+m^2})^{1/4}}{(1 + m\eta)^{5/8}} \quad (99)$$

En vertu de la relation (6), le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement turbulent rugueux dans le canal trapézoïdal est :

$$R_r = \frac{8,805}{\nu} \left( \frac{Q\varepsilon^{5/3}\sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/8} \left[ \frac{\sqrt{\eta(1+m\eta)}}{(1 + 2\eta\sqrt{1+m^2})} \right]^{5/4} \quad (100)$$

Le diamètre hydraulique  $D_{hr}$  est, selon (7) :

$$D_{hr} = 1,817 \left( \frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \left[ \frac{\sqrt{\eta(1+m\eta)}}{1 + 2\eta\sqrt{1+m^2}} \right]^{3/4} \quad (101)$$

La vitesse moyenne  $V_r$  de l'écoulement en régime turbulent rugueux dans le canal trapézoïdal est, en vertu de (8) :

$$V_r = 4,846 \left( \frac{Q\varepsilon^{1/3}\sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/4} \left[ \frac{\sqrt{\eta(1+m\eta)}}{1 + 2\eta\sqrt{1+m^2}} \right]^{1/2} \quad (102)$$

#### REMARQUE

Le canal de forme rectangulaire est régi par les équations (96) à (102) avec  $m = 0$  ( ou  $\theta = 90^\circ$  ).

## VI. RELATION GENERALISEE AU CALCUL DU DEBIT DANS LES CONDUITES ET CANAUX

### VI.1. Conductivité relative

Cette dernière partie se propose d'établir une relation généralisée permettant le calcul explicite du débit dans les conduites et canaux de forme géométrique quelconque et pour tout domaine d'écoulement. Ceci est possible par la combinaison des relations de *Colebrook – White* et de *Darcy – Weisbach*. Nous rappelons que celles-ci s'écrivent respectivement :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right] \quad (103)$$

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (104)$$

où  $A = a^2 A_1$ ,  $D_h = 4A/P = 4a(A_1/P_1)$  et  $R = 4Q / (P\nu) = 4Q/(aP_1\nu)$ . En éliminant le coefficient de frottement  $f$  entre les relations (103) et (104), on peut écrire:

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -4\sqrt{2} \sqrt{\frac{A_1^3}{P_1}} \log \left[ \frac{\varepsilon/a \left( \frac{P_1}{A_1} \right)}{14,8} + \frac{2,51}{8\sqrt{2}R_m} \right] \quad (105)$$

Dans cette dernière relation  $R_m$  est le nombre de Reynolds modifié tel que :

$$R_m = \frac{\sqrt{gJa^3(A_1/P_1)^3}}{\nu} \quad (106)$$

Les termes adimensionnels  $A_1$  et  $P_1$  dépendent, comme nous l'avons déjà vu, des seuls paramètres de forme du profil liquide considéré et  $a$  désigne une dimension linéaire quelconque de ce même profil. La relation (105) permet ainsi le calcul explicite du débit  $Q$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu$  véhiculé par une conduite ou un canal dont les caractéristiques  $J$ ,  $\varepsilon$ ,  $a$  et paramètre de forme sont connus. La relation (106) montre que le nombre de Reynolds modifié  $R_m$  dépend de la l'accélération gravitationnelle  $g$ , de la pente  $J$ , de la dimension linéaire  $a$ , du paramètre de forme et de la viscosité cinématique  $\nu$ . Dans le domaine turbulent rugueux, la relation (105) devient :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -4\sqrt{2} \sqrt{\frac{A_1^3}{P_1}} \log \left[ \frac{\varepsilon/a \left( \frac{P_1}{A_1} \right)}{14,8} \right] \quad (107)$$

Dans le domaine pratiquement lisse ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), on peut écrire :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{2,51}{8\sqrt{2}R_m} \right] \quad (108)$$

## VI.2. Application au cas de la conduite circulaire

La conduite circulaire de diamètre  $D$ , partiellement occupé par un écoulement, est caractérisée par  $a = D$ ,  $A_1 = (\theta - \sin \theta \cos \theta)/4$  et  $P_1 = \theta$ . En tenant compte de ces considérations, la relation (105) devient :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{(\theta - \sin \theta \cos \theta)^3}{\theta}} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7} \left( \frac{\theta}{\theta - \sin \theta \cos \theta} \right) + \frac{2,51}{8\sqrt{2}R_m} \right] \quad (109)$$

avec, selon la relation (106):

$$R_m = \frac{\sqrt{gJD^3}}{8\nu} \left( \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\theta} \right)^{3/2} \quad (110)$$

Lorsque la conduite est pleine ( $\theta = \pi$ ), la relation (109) se simplifie pour devenir :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{8\sqrt{2}R_m} \right] \quad (111)$$

avec :

$$R_m = \frac{\sqrt{gJD^3}}{8\nu} \quad (112)$$

La relation (111) conduit à écrire, pour le cas du domaine d'écoulement turbulent rugueux ( $\nu \rightarrow 0$  ou  $R_m \rightarrow \infty$ ) :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right] \quad (113)$$

Lorsque le régime d'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ):

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2} \log \left[ \frac{2,51}{8\sqrt{2}R_m} \right] \quad (114)$$

## VII. CONCLUSION

Une approche théorique est présentée au calcul de la dimension linéaire d'un profil liquide quelconque en écoulement uniforme. La fonction de six paramètres qui régit cet écoulement est transformée en un produit de trois fonctions  $\lambda$ ,  $\Gamma$  et  $a_o$ . La dimension linéaire s'écrit alors  $a = \lambda\Gamma a_o$ , lorsque l'écoulement est en régime de transition, et  $a = \psi\Gamma a_o$  lorsque l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse. Il a été établi que  $\lambda$  dépend des caractéristiques ( $R_r$ ,  $\varepsilon/D_{hr}$ ) de l'écoulement en régime turbulent rugueux pour lequel la dimension linéaire est connue. La valeur particulière  $\lambda=1$  indique que

l'écoulement est dans le domaine turbulent rugueux, tandis que l'écoulement dans le domaine de transition est caractérisé par  $\lambda > 1$

Lorsque l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse, le calcul a été mené sur une conduite hypothétique de rugosité relative  $\varepsilon/D_{hr}=1,05 \cdot 10^{-2}$ , caractérisée par une même conductivité que la conduite réelle et véhiculant un écoulement en régime turbulent rugueux. Ceci a permis d'exprimer la fonction  $\psi$  en fonction du seul paramètre connu  $R_r$ .

La combinaison des formules transformées et généralisées de *Darcy – Weisbach* et de *Colebrook–White* a permis d'aboutir à une relation explicite de la conductivité relative, applicable à tout profil géométrique et pour toute nature du régime d'écoulement. Ces relations sont destinées au calcul explicite du débit  $Q$ .

Enfin, la méthode préconisée par cette étude a été appliquée à quelques profils géométriques, notamment à la conduite circulaire.

#### REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bazin, H. (1897). Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, Mémoire N° 41, Annales des ponts et chaussées, Vol. 14, ser. 7, 4<sup>ème</sup> trimestre, pp. 20-70, Paris.
- Chow, V.T. (1973). *Open Channel Hydraulics*, McGraw Hill Book Company, New York.
- Darcy, H. (1854). Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Vol. 38, pp. 1109-1121, Paris.
- Ganguillet, E., Kutter, W.R. (1869). Versuch zur Aufstellung einer neuen allgemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des wassers in canälen und Flüssen, Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines, Vol. 21, N° 1, pp. 6-25; N° 2-3, pp. 46-59, Vienna.
- Hager, W.H. (1987). Die Berechnung turbulenter Rohrströmungen, 3R-International, Vol. 26, Heft 2, pp. 116-121.
- Hama, F.R. (1954). Boundary Layer growth characteristics for smooth and rough surfaces, Transactions, Society of Naval Architects and Marine Engineers, Vol. 62, pp. 333-351.
- Iwasa, Y. (1957). Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Japan, Vol. XIX, N° III, pp. 229-254.
- Keulegan, H.G. (1938). Laws of turbulent flow in open channels, Research Paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, pp. 707-741.
- Manning, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes, Transactions, Institution of Civil Engineers of Ireland, Vol. 20, pp. 161-207, Dublin.
- Morris, H.M. (1955). A new concept of flow in rough conduits, Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol. 120, pp. 373-398.

- Powell, R.W. (1950). Resistance to flow in rough channels, Transactions, American Geophysical Union, Vol. 31, N° 4, pp. 575-582.
- Prandtl, L. (1926). Über die ausgebildete Turbulenz, Proceedings of the 2d International Congress of Applied Mechanics, Zürich, pp. 62-74.
- Schlichting, H. (1955). Boundary Layer Theory, McGraw Hill Book Company, New York, Pergamon Press Ltd., London.
- Sinniger, O.R., Hager, W.H. (1989). Écoulements stationnaires. Constructions hydrauliques, Ed. Presses polytechniques Romandes, Vol. 15, pp. 81-104.
- Stanton, T.E., Pannel, J.R. (1914). Similarity of motion in relation to surface friction of fluids, Philosophical Transactions, Royal Society of London, Vol. 214A, pp. 199-224.
- Strickler, A. (1923). Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauheitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen, Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft, N° 16, Bern.
- Weisbach, J. (1845). Lehrbuch der Ingenieur und Maschinenmechanik, Brunswick, Germany.

## PRINCIPALES NOTATIONS

a (m)	Dimension linéaire.
A (m <sup>2</sup> )	Aire d'une section mouillée.
A <sub>1</sub> (-)	Aire de la section mouillée pour a égal à l'unité (A/a <sup>2</sup> ).
D (m)	Diamètre d'une conduite.
D <sub>h</sub> (m)	Diamètre hydraulique.
f (-)	Coefficient de frottement.
g (m.sec <sup>-2</sup> )	Accélération de la pesanteur.
h (m)	Profondeur d'un écoulement.
J (-)	Gradient de perte de charge.
P (m)	Périmètre mouillé.
P <sub>1</sub> (-)	Périmètre mouillé pour a égal à l'unité (P/a).
Q (m <sup>3</sup> .sec <sup>-1</sup> )	Débit.
q (-)	Débit relatif ( $q = Q / \sqrt{gD^5}$ ).
R (-)	Nombre de Reynolds.
V (m.sec <sup>-1</sup> )	Vitesse moyenne d'un écoulement.
ε (m)	Rugosité absolue des parois d'un canal.
ξ (-)	Paramètre de forme d'un segment circulaire (h/D).
ν (m <sup>2</sup> .sec <sup>-1</sup> )	Viscosité cinématique.
λ (-)	Facteur de correction de la dimension linéaire dans le domaine de transition.
ψ (-)	Facteur de correction de la dimension linéaire dans le domaine lisse.
L'indice "r"	indique le domaine rugueux.