



## **ÉTUDE COMPARATIVE DES SCHEMAS D'ÉLÉMENTS FINIS APPLIQUES AUX ÉCOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS A SURFACE LIBRE**

A. HAZZAB, M. ATALLA , M. HAFIANE

Laboratoire de Modélisation et Méthodes de Calcul  
Centre Universitaire de Saïda, BP 138 Ennasr Saïda 20002

### **INTRODUCTION**

La concentration des activités humaines à proximité des fleuves et rivières nécessite la prise en charge des problèmes posés par les crues. Les inondations en sont l'expression la plus marquante. Il existe de nombreux exemples où les cours d'eau occasionnent des dégâts humains et matériels. La crue hivernale du 10 novembre 2002 à Bab-El-Oued a causé plus de 700 victimes et des pertes matérielles qui se chiffrent en milliards de DA.

La maîtrise parfaite et totale des cours d'eau ne sera jamais possible. Néanmoins le traitement passe par une meilleure connaissance du phénomène (crue) et exige le recours à des méthodes de prévision. La mise au point de modèles numériques peut répondre à ces deux exigences.

La simulation des écoulements à surface libre par le modèle de SAINT-VENANT a plusieurs applications. On peut citer par exemple :

- La prévision des risques d'inondation (annonce des crues, aide à l'élaboration des plans de secours et d'aménagement);
- La détermination de zones submersibles et celles qui subissent un couvremet-découvremet au cours du temps;
- La simulation de la propagation des crues (e.g. onde de rupture du barrage);
- L'étude d'impact d'ouvrages hydrauliques sur le milieu;
- La simulation des écoulements dans les canaux découverts, les ports, les lacs et les estuaires.

Les équations de SAINT-VENANT constituent un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type hyperbolique. L'intégration exacte de ces équations étant très complexe, leur solution analytique est rare. Néanmoins, il existe plusieurs méthodes numériques permettant le traitement informatique de ces équations, il s'agit des :

- Méthodes des caractéristiques (M.C) ;
- Méthodes des différences finies (M.D.F) ;
- Méthodes des éléments finis (M.E.F) ;
- Méthodes des volumes finis (M.V.F).

La présente étude est une contribution à la résolution de ces équations par la méthode des éléments finis. Cette dernière présente plusieurs avantages. Parmi ces avantages, il y a le fait qu'il n'est pas nécessaire de séparer les algorithmes de calcul des écoulements fluviaux et torrentiels. En plus, les éléments décrivant le domaine de calcul permettent d'adapter très facilement la topographie de la rivière. Aussi, l'utilisation des conditions aux limites naturelles est un avantage significatif.

Trois méthodes- schémas- d'éléments finis, qui s'appliquent aux équations hyperboliques, sont présentées dans cette étude. La première méthode est celle de Bubnov-Galerkin qui est analogue à la méthode des différences finies centrées. Les deux autres méthodes, dissipative de Galerkin et Caractéristique dissipative de Galerkin, sont du type Petrov-Galerkin dans lesquelles un terme de diffusion numérique est introduit pour diminuer les oscillations qui se présentent dans la méthode de Bubnov-Galerkin. La comparaison entre ces trois méthodes montre que l'utilisation des deux vitesses caractéristiques dans la détermination du terme de diffusion artificielle tend à donner des solutions plus stables et plus précises pour une large variété et de types d'écoulements.

### MODELE MATHEMATIQUE DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE

Les équations de Saint-Venant à une dimension, sous sa forme conservative, pour un canal prismatique rectangulaire, s'écrivent :

- L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

- L'équation de quantité de mouvement est donnée par :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (QU)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g A H}{2} \right) - g A (J_f - J_e) = 0 \quad (2)$$

où  $A$  est la section d'écoulement,  $U$  est la vitesse moyenne sur une section transversale ( $U = Q/A$ ),  $H$  est la profondeur d'eau ( $H = A/B$ , où  $B$  est la largeur du canal),  $J_e$  est la pente énergétique,  $J_f$  est la pente longitudinale du fond,  $t$  est le temps,  $x$  la coordonnée longitudinale et  $g$  est l'accélération de la

pesanteur. Les équations (1) et (2) peuvent être représentées sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + S = 0 \quad (3)$$

où :

$$\phi \equiv \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad (4)$$

est le vecteur solution,

$$R \equiv \begin{pmatrix} Q \\ U Q + g A H/2 \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2/2 & U \end{bmatrix} \phi \quad (5)$$

est le vecteur des termes de flux et dépendant de  $\phi$ ,  $c = \sqrt{g H}$  est la célérité d'onde et

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -g A (J_f - J_e) \end{pmatrix} \quad (6)$$

représente le vecteur des termes sources. La forme non conservative de l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (g H - U^2) \frac{\partial A}{\partial x} + 2U \frac{\partial Q}{\partial x} - g A (J_f - J_e) = 0 \quad (7)$$

Les équations (1) et (7) peuvent être combinées pour donner, sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} + S = 0 \quad (8)$$

où

$$A \equiv \frac{\partial R}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (g H - U^2) & 2U \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nous obtenons ainsi la matrice dite de convection.

## DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

La recherche d'une solution approchée par la méthode des éléments finis comporte deux étapes. La première concerne le choix des fonctions d'interpolation et la seconde est liée au choix des fonctions de pondération qui minimisent l'erreur entre la solution approximée et la solution exacte. Dans cette étude, les équations élémentaires sont dérivées en utilisant la méthode des

résidus pondérés de type Galerkin. La discrétisation spatiale de ce système d'équations est effectuée à l'aide d'une interpolation linéaire pour approximer la solution sur chaque élément linéaire. Ainsi :

$$\phi \approx \phi = \sum_{j=1}^n B_j \Phi_j \tag{10}$$

où

$$B_j \equiv \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j \end{bmatrix} \tag{11}$$

$\phi$  est une approximation d'une fonction réelle, et  $n$  est le nombre de nœuds dans le domaine. Pour le  $j^{ieme}$  nœud, la fonction d'interpolation utilisée est donnée par :

$$b_j(x) \equiv 0; \quad x < x_{j-1} \tag{12a}$$

$$b_j(x) \equiv \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}; \quad x_{j-1} < x < x_j \tag{12b}$$

$$b_j(x) \equiv \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}; \quad x_j < x < x_{j+1} \tag{12c}$$

$$b_j(x) \equiv 0; \quad x > x_{j+1} \tag{12d}$$

### Méthode de Bubnov-Galerkin

L'approche la plus simple des méthodes des éléments finis est celle de Bubnov-Galerkin où les fonctions de pondération sont présentées comme étant égales aux fonctions d'interpolation. La forme intégrale de type Galerkin du système (3) est :

$$\int_0^L B_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial x} + S \right) dx = 0 \tag{13}$$

où  $L$  est la longueur du domaine. L'intégration par partie du terme  $B_i \frac{\partial R}{\partial x}$

donne :

$$\int_0^L \left( B_i \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial B_i}{\partial x} R \right) dx + (B_i R) \Big|_0^L = 0 \tag{14}$$

La substitution des fonctions d'interpolation donne :

$$\int_0^L \left[ B_i B_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} - \frac{\partial B_i}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2/2 & U \end{bmatrix} B_j \Phi_j \right] dx + \left( B_i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2/2 & U \end{bmatrix} \Phi_j \right) \Big|_0^L = 0 \tag{15}$$

La forme de l'équation (r) peut être écrite sous une notation matricielle. Ce qui donne :

$$M_{ij} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_j + K_{ij} \Phi_j + F_{ij} = 0 \quad (16)$$

où

$$M_{ij} = \int_0^L B_i B_j dx \quad (17)$$

est la matrice masse, et

$$K_{ij} = \int_0^L \left( -\frac{\partial B_i}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2/2 & U \end{bmatrix} B_j \right) dx \quad (18)$$

est la matrice de rigidité, et

$$F_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} B_i Q \Big|_0^L \\ B_i \left( \frac{g A H}{2} + Q U \right) \Big|_0^L \end{array} \right\} \quad (19)$$

est le vecteur du flux à travers les frontières. Les termes de  $F_{ij}$  représentent les conditions aux limites naturelles.

L'équation (16) sera ensuite discrétisée par rapport au temps, par l'utilisation d'une approximation de différences finis implicite dont la forme est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} [M + \theta \Delta t K(\Phi^{n+1})] (\Phi^{n+1}) + \theta \Delta t F^{n+1} &= [M + (1-\theta) \Delta t K(\Phi^n)] (\Phi^n) + (1-\theta) \Delta t (F^n) \\ + (1-\theta) \Delta t (F^n) & \end{aligned} \quad (20)$$

Pour résoudre ce système non linéaire, nous utilisons l'itération de type Newton-Raphson. Aussi, pour le test de convergence, nous avons opté pour la comparaison entre la norme du vecteur des corrections et une tolérance indiquée. Donc si :

$$\frac{\sum [(\delta \Phi)^2]}{\sum (\Phi^2)} \leq Tolerance \quad (21)$$

Alors la solution progresserait au prochain pas de temps.

Les matrices élémentaires qui résultent de l'intégrale élémentaire sont:

$$M_e \equiv \begin{bmatrix} m_{aa} & m_{aq} \\ m_{qa} & m_{qq} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$m_{aa} = m_{qq} \equiv \int_e b_i b_j dx \tag{23}$$

$$m_{aq} = m_{qa} \equiv 0 \tag{24}$$

$$K_e \equiv \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{aq} \\ k_{qa} & k_{qq} \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$k_{aa} \equiv 0 \tag{26}$$

$$k_{aq} \equiv \int_e -\frac{db_i}{dx} b_j dx \tag{27}$$

$$k_{qa} \equiv \int_e \left( -\frac{g H}{2} \frac{db_i}{dx} b_j - g J_f b_i b_j \right) dx \tag{28}$$

$$k_{qq} \equiv \int_e \left( -U \frac{db_i}{dx} b_j + f b_i b_j \right) dx \tag{29}$$

où  $f$  est obtenue en appliquant la relation de Manning :

$$f = \frac{n_m^2 |U|}{R_h^{4/3}} \tag{30}$$

$R_h$  est le rayon hydraulique qui s'exprime par  $R_h = B H / (2H + B)$  pour un canal rectangulaire et  $n_m$  est le coefficient de Manning.

### Méthode de Petrov-Galerkin

Plusieurs recherches ont été faites pour éliminer ou diminuer les oscillations associées à la méthode de Bubnov-Galerkin. Une alternative consiste à utiliser la méthode de Petrov-Galerkin dans laquelle des fonctions de pondération décentrées sont utilisées pour introduire une diffusion numérique qui assure l'atténuation des oscillations. Pour un écoulement unidimensionnel non permanent à surface libre, la formulation équivalente du type du Bubnov-Galerkin peut être représentée sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & b_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ M \end{Bmatrix}}_{\text{système original}} + \underbrace{\omega \frac{\Delta x}{2} W \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & b_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ M \end{Bmatrix}}_{\text{termes de décentrage}} = \{0\} \tag{31}$$

où  $C$  et  $M$  se réfèrent respectivement aux équations de continuité et de quantité de mouvement,  $\omega$  représente un paramètre de diffusion (ou un coefficient de décentrage) qui dépend de la situation d'écoulement,  $W$  est la matrice de décentrage qui contrôle à la fois la quantité et la direction de la diffusion numérique. Les composantes de cette matrice seront notées comme suit :

$$W = \begin{bmatrix} w_{aa} & w_{aq} \\ w_{qa} & w_{qq} \end{bmatrix} \quad (32)$$

La première lettre des indices des composantes dénote l'équation dans laquelle la contribution de décentrage s'applique ( $a$  pour l'équation de continuité et  $q$  pour l'équation de quantité de mouvement). Tandis que la seconde décrit l'équation sur laquelle elle s'opère (e.g.  $w_{aq}$  représente le coefficient appliqué à l'équation de quantité de mouvement pour contribuer au décentrage de l'équation de continuité). Les matrices masses deviennent :

$$m_{aa} \equiv \int_e \left\{ b_i b_j + \left( w_{aa} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \right) \right\} dx \quad (33)$$

$$m_{aq} \equiv \int_e \left( w_{aq} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \right) dx \quad (34)$$

$$m_{qa} \equiv \int_e \left( w_{qa} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \right) dx \quad (35)$$

$$m_{qq} \equiv \int_e \left\{ b_i b_j + \left( w_{qq} \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{db_i}{dx} b_j \right) \right\} dx \quad (36)$$

Les matrices de rigidité deviennent :

$$k_{aa} \equiv \int_e \omega \frac{\Delta x}{2} w_{aa} \left( (g H - U^2) \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} - g J_f \frac{db_i}{dx} b_j \right) dx \quad (37)$$

$$K_{aq} \equiv \int_e \left( -\frac{db_i}{dx} b_j + \omega \frac{\Delta x}{2} \left( w_{aa} \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} + w_{aq} f \frac{db_i}{dx} b_j + 2U w_{aq} \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} \right) \right) dx \quad (38)$$

$$k_{qa} \equiv \int_e \left( -\frac{g H}{2} \frac{db_i}{dx} b_j - g J_f b_i b_j \right) + \omega \frac{\Delta x}{2} w_{qq} \left[ -g J_f \frac{db_i}{dx} b_j + (g H - U^2) \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} \right] dx \quad (39)$$

$$k_{qq} \equiv \int_e \left( -U \frac{db_i}{dx} b_j + f b_i b_j \right) + \omega \frac{\Delta x}{2} \left( w_{qq} f \frac{db_i}{dx} b_j + (w_{qa} + 2U w_{qq}) \frac{db_i}{dx} \frac{db_j}{dx} \right) dx \quad (40)$$

Le système à résoudre sera le même que celui qui est défini par l'équation (16).

**Spécification de la matrice W**

Dans la méthode dissipative de Galerkin (DG), la matrice de décentrage W , pour U > 0 , est donnée comme suit :

$$W \equiv \frac{A}{|U+c|} = \begin{bmatrix} 0 & 1/|U+c| \\ (c^2 - U^2)/|U+c| & 2U/|U+c| \end{bmatrix} \quad (41)$$

Décomposons A :

$$A = T \Lambda T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2c & -1/2c \\ (U+c)/2c & -(U-c)/2c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U+c & 0 \\ 0 & U-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(U-c) & 1 \\ -(U+c) & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

où

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Λ est la matrice des valeurs propres, λ<sub>i</sub> = U ± c pour i = 1, 2 sont les vitesses des caractéristiques.

L'équation (41) peut être évaluée comme :

$$W = T \begin{bmatrix} \lambda_1/|\lambda_1| & 0 \\ 0 & \lambda_2/|\lambda_1| \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2c & -1/2c \\ (U+c)/2c & -(U-c)/2c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (U+c)/|U+c| & 0 \\ 0 & (U-c)/|U+c| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(U-c) & 1 \\ -(U+c) & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

La matrice de décentrage dans le schéma DG n'utilise donc seulement que la caractéristique positive λ<sub>1</sub> = (U + c) . De ce fait, le décentrage appliqué à l'onde régressive peut être très petit.

La méthode caractéristique dissipative de Galerkin (CDG) a été développée par Hicks et Stefler (1992). La forme ainsi proposée pour W est :

$$W = \frac{A}{|A|} \quad (45)$$

La matrice de décentrage, pour cette méthode, peut donc être évaluée comme suit :

$$W = T \begin{bmatrix} \lambda_1/|\lambda_1| & 0 \\ 0 & \lambda_2/|\lambda_2| \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2c & -1/2c \\ (U+c)/2c & -(U-c)/2c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (U+c)/|U+c| & 0 \\ 0 & (U-c)/|U-c| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(U-c) & 1 \\ -(U+c) & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$



Il est à noter que chaque vitesse caractéristique est utilisée dans la détermination de la matrice de décentrage, d'où le terme " Caractéristique " dans l'appellation de cette méthode (i.e. méthode Caractéristique Dissipative de Galerkin, CDG). Les deux schémas peuvent être comparés en écrivant les matrices de décentrage en fonction du nombre de Froude :

$$Fr = \frac{U}{c} \quad (47)$$

Pour le schéma DG, la matrice de décentrage devient :

$$W \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \frac{1}{|Fr+1|} \\ c \frac{(1-Fr^2)}{|Fr+1|} & \frac{2Fr}{|Fr+1|} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Tandis que pour le schéma CDG ,  $W$  s'écrit :

$$W \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-Fr^2) \left( \frac{1}{|Fr+1|} - \frac{1}{|Fr-1|} \right) & \frac{1}{2c} \left( \frac{Fr+1}{|Fr+1|} - \frac{Fr-1}{|Fr-1|} \right) \\ \frac{c}{2}(1-Fr^2) \left( \frac{Fr+1}{|Fr+1|} - \frac{Fr-1}{|Fr-1|} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{(Fr+1)^2}{|Fr+1|} - \frac{(Fr-1)^2}{|Fr-1|} \right) \end{bmatrix} \quad (49)$$

La figure 1 illustre la variation des termes des matrices  $W$  en fonction du nombre de Froude.

- $Fr = 0$  : Dans ce cas, les termes de  $W$  sont identiques :

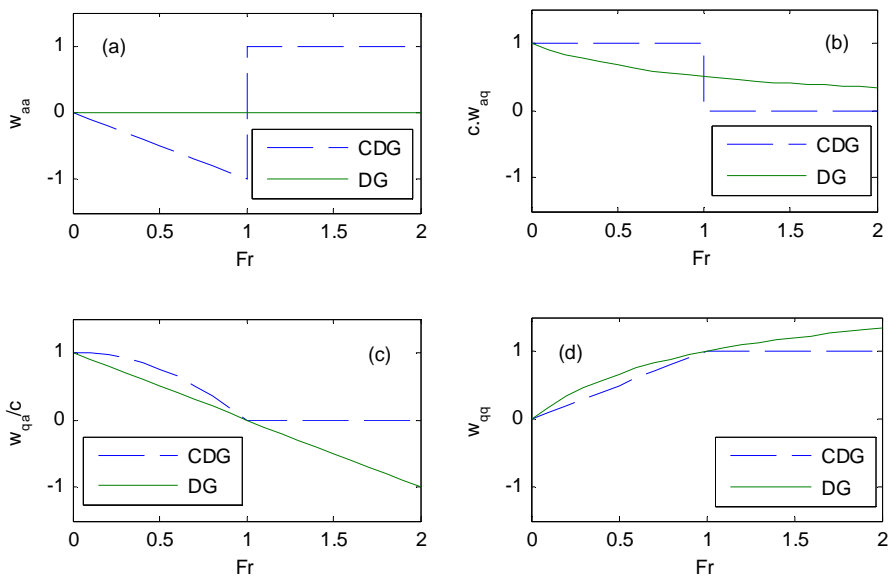
$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1/c \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

- À  $Fr = 1$  : Ils se croisent à :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1/2c \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

- $Fr > 1$  : Pour un écoulement torrentiel, la matrice de décentrage dans le schéma CDG est constante et elle est égale à :

$$W \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$



**Figure 1 : Schéma représentant la variation des éléments de la matrice (W) de décentrage en fonction du nombre de Froude.**

**Spécification du terme  $\omega$  de dissipation**

L'évaluation de la valeur du paramètre de décentrage  $\omega$ , pour les schémas de Petrov-Galerkin, à fait l'objet de plusieurs expériences numériques. Brooks et Hughes (1982) montrent que, pour un problème transitoire, la détermination d'une valeur optimale de  $\omega$  est basée sur la précision de la solution et la minimisation de l'erreur de phase.

Katopodes (1984) a examiné plusieurs valeurs de  $\omega$  pour le schéma DG appliqué aux équations de SAINT-VENANT incluant  $\omega = 2/\sqrt{15}$  ( $\omega \approx 0,5$ ) et  $\omega = \Delta t |U + c| / \Delta x$ . Dans les problèmes où une discontinuité (e.g. ressaut hydraulique) se présente, de grandes valeurs de  $\omega$  sont nécessaires pour atténuer suffisamment les ondes régressives. Il a conclu que la quantification d'une valeur optimale de  $\omega$  nécessite la réalisation des expériences numériques. Pour le cas des équations linéaires et en considérant le schéma DG, Froehlich (1988) a examiné l'effet de la variation du coefficient de décentrage sur la phase et la précision de la solution. Il a observé une grande sensibilité au nombre de Courant à des courtes longueurs d'onde. Le nombre de Courant étant défini comme suit :

$$C = \frac{(U + c)\Delta t}{\Delta x} \quad (53)$$

Pour examiner la sensibilité du schéma CDG au terme de dissipation  $\omega$ , Hicks et Steffler (1990) ont réalisé des expériences numériques correspondant aux trois valeurs suivantes de  $\omega$  : 0,25, 0,50 et 1. Ils ont conclu qu'une bonne précision, associée à une atténuation élevée des oscillations, est obtenue avec une valeur de  $\omega = 0,50$ , pour le cas des écoulements permanent. Tandis que pour le cas des écoulements non permanent, la valeur optimale de  $\omega$  correspond à 0,25.

Le schéma CDG est particulièrement intéressant dans l'élimination des oscillations de courte longueur d'onde. Un nombre de Courant égal à 0,5 est considéré comme étant le mieux indiqué afin d'équilibrer les erreurs en espace et en temps.

## TESTS NUMERIQUES

Le but de ces tests est de faire une comparaison entre les trois méthodes (BG, DG et CDG). Cette comparaison permet de déterminer la méthode la plus fiable en matière de précision et de stabilité de la solution. L'étude comparative comporte l'examen des écoulements permanents (ressaut hydraulique) et non permanents (rupture de barrage). Les tests sont réalisés en utilisant la forme conservative des équations de SAINT-VENANT. Cependant la forme non conservative des équations est utilisée dans la détermination de la matrice de décentrage. Les valeurs de  $\omega$ , considérées dans le processus de calcul pour les deux cas permanent et non permanent, sont celles obtenues par Hicks et Steffler (1990).

### Ressaut Hydraulique

Ce test, adapté par (Katopodes, 1984), comporte la vérification de la transition entre un écoulement torrentiel et un écoulement fluvial dans un canal horizontal et sans frottement. Trente nœuds, espacés de 5 m d'intervalle sont utilisés dans l'analyse. Le débit est initialement fixé à 5m pour l'ensemble des noeuds. À travers la moitié amont du domaine, la profondeur initiale de l'écoulement torrentiel est fixée à 1 m, tandis que la profondeur de l'écoulement fluvial est de 1,8 m à la moitié aval du domaine. Les conditions aux limites nécessaires sont la hauteur et le débit en amont et la hauteur à l'aval. Ce test est exécuté de façon semi implicite ( $\theta = 0,50$ ) et à  $\Delta t = 0,072s$  correspondant à un nombre de Courant  $C = 0,1$ . Les figures 2a et 2b montrent les résultats obtenus par les trois

méthodes après 100 pas de temps ( $t = 7,2s$ ). Les conditions initiales sont aussi représentées sur les mêmes figures pour faciliter la comparaison. On remarque qu'une détérioration significative de la solution se produit pour la méthode BG, indiquant ainsi l'incapacité de cette méthode à atténuer les perturbations de  $2\Delta x$ . Les résultats du schéma DG montrent, malgré que le choc est préservé, que la présence des oscillations est significative. Pour le schéma CDG, on observe que les oscillations sont en effet diminuées au voisinage du ressaut, qui est lui-même immobile et mieux préservé (Fig. 2a). Il y a cependant, une légère diminution dans le débit observé dans la branche fluviale en aval (Fig. 2b).

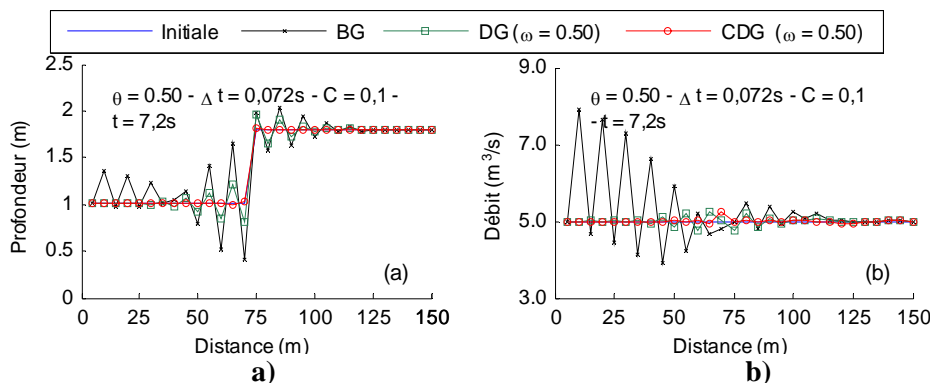


Figure 2 : Tests numériques. (a) et (b) ressaut hydraulique.

### Rupture de Barrage

Ce test est reproduit à partir des travaux de Fennema et al. (1987). Dans ces derniers, une simulation de la rupture instantanée d'un barrage dans un canal horizontal et sans frottement est étudiée. Le maillage est formé par quatre vingt éléments sur une longueur totale de 2 km. Chaque maille a 25 m de longueur et le nombre total des nœuds est de 81. Le barrage lui-même est positionné sur un seul élément. Le débit est considéré initialement comme étant nul pour l'ensemble des nœuds. La profondeur initiale dans la moitié amont du domaine est  $H_0 = 10m$  et à la moitié avale est de  $H_1 = 5m$ .

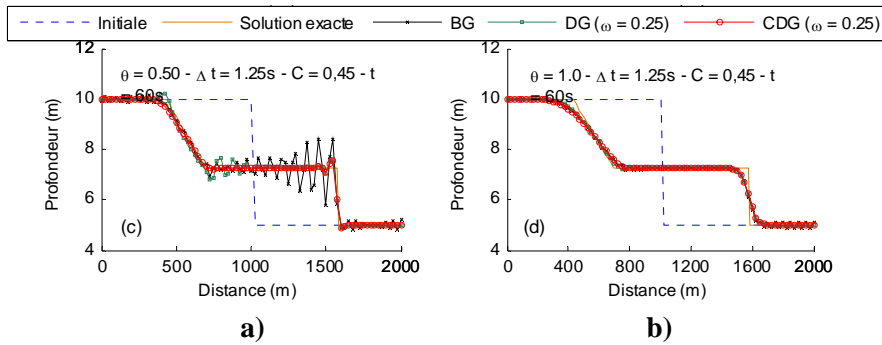
Les trois schémas BG DG et CDG sont exécutés à des pas de temps  $\Delta t = 1,25s$ . Ceux-ci correspondent à un nombre de Courant  $C = 0,47$ . Cette valeur est déterminée en se basant sur la vitesse de l'onde progressive (la valeur de cette vitesse calculée analytiquement est égale à 9,35m/s). Les résultats obtenus pour  $t = 60s$  sont présentés sur la figure 3a et 3b. L'exploration des résultats du schéma BG, monte que des oscillations sont observées toute au long de la solution. L'amplitude de ces oscillations prend de l'ampleur juste au point

aval de la discontinuité du profil de la profondeur de l'écoulement (Fig. 3b). Ces oscillations ont tendance à s'atténuer pour le cas où la valeur du coefficient de pondération est égale à 1. La tendance de l'atténuation de ces oscillations augmente d'une manière significative au point de la discontinuité. Le profil de la discontinuité, pour la solution numérique, a une configuration d'un tronçon composé de cinq éléments (Fig. 3b), contrairement au cas de la solution analytique où le profil est formé de tronçon d'un seul élément.

Pour le schéma DG, les remarques suivantes sont observées :

- Pour le cas  $\theta = 0,50$  : Le profil de la solution au niveau du point de la discontinuité, est formé d'un segment composé de deux éléments; des oscillations sont observées dans l'onde régressive.
- Pour le cas où  $\theta = 1$  : La solution présente un profil qui à tendance d'être plus lisse.

Dans le cas du schéma CDG, le profil de la solution est aussi formé d'un segment composé de deux éléments. Cependant aucune oscillation n'est observée le long du profil de la solution et ce pour  $\theta = 0,5$ . Pour le cas  $\theta = 1$ , les résultats sont presque identiques au cas du schéma DG (Fig. 3b).



**Figure 3 : Tests numériques : (a) et (b) rupture de barrage**

## CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons étudié trois schémas d'éléments finis : le schéma de Bubnov-Galerkin (BG), le schéma dissipative de Galerkin (DG) et le schéma Caractéristique Dissipative de Galerkin (CDG). L'introduction d'un paramètre de diffusion numérique dans les deux derniers schémas DG et CDG, qui sont de type Petrov-Galerkin, a permis de diminuer les oscillations numériques associées au schéma BG. À partir des tests élaborés (ressaut hydraulique et rupture de barrage), nous avons constaté que la prise en compte des deux vitesses caractéristiques dans la détermination du terme de diffusion numérique donne des solutions consistantes et stables. En outre, les tests montrent que le

schéma DG est moins stable que le schéma CDG du fait que ce dernier utilise les deux vitesses caractéristiques dans le décentrage. La matrice de décentrage dans le schéma DG utilise seulement la caractéristique positive  $\lambda_1 = (U + c)$ . De ce fait, le décentrage appliqué à l'onde régressive peut être très petit.

#### NOTATION

$A$	(-)	Matrice de convection
$B$	(-)	Matrice des fonctions d'interpolation
$C$	(-)	Nombre de Courant
$c$	(m/s)	Célérité
$F$	(-)	Vecteur des termes de flux à travers les frontières
$Fr$	(-)	Nombre de Froude
$g$	(m/s <sup>2</sup> )	Accélération gravitationnelle
$H$	(m)	Profondeur d'eau
$i, j$	(-)	Indices entiers
$J_e$	(-)	Pente énergétique
$J_f$	(-)	Pente de fond du canal
$K$	(-)	Matrice de rigidité
$L$	(m)	Longueur du domaine
$M$	(-)	Matrice masse
$n$	(-)	Nombre de nœuds d'interpolation
$n_m$	(m <sup>-1/3</sup> .s)	Coefficient de Manning
$Q$	(m <sup>3</sup> /s)	Débit d'écoulement
$R$	(-)	Vecteur des termes de flux
$R_h$	(m)	Rayon hydraulique
$S$	(-)	Vecteur des termes sources;
$t$	(s)	Temps;
$U$	(m/s)	Vitesse moyenne dans une section
$x$	(m)	Coordonnée longitudinale
$W$	-	Matrice de décentrage;
$\theta$	(-)	Coefficient de pondération
$\Lambda$	(-)	Matrice des valeurs propres
$\lambda_i$	(m/s)	Vitesse caractéristique;
$\Phi$	(-)	Vecteur des variables nodales
$\phi$	(-)	Vecteur solution
$\omega$	(-)	Coefficient de décentrage

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- BROOKS A., HUGHES T. (1982). Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 32, pp. 199-259.
- FENNEMA R.J., CHAUDHRY M.H. (1987). Simulation of one-dimensional dam-break flows, *International Journal of Hydraulic Research*, vol. 25, no. 1, pp. 41-51.
- FROEHLICH D. (1988). Discussion of "A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow", by N. D. Katopodes., *J. Hydr. Engrg.*, vol. 111, no. 4, pp. 1200-1204.
- HICKS F., STEFFLER P. (1990). Finite element modeling of open channel flow, *Tech. Rep. 90-6*, Univ. of Alberta, Alberta, Canada.
- HICKS F., STEFFLER P. (1992). A characteristic dissipative Galerkin scheme for open-channel flow, *J. Hydr. Engrg.*, vol. 118, no. 2, pp. 337-352.
- KATOPODES N. (1984). A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow, *J. Hydr. Engrg.*, vol. 110, no. 4, pp. 450-466.