



## **ÉCOULEMENT SUPERCRITIQUE A TRAVERS UN ÉLARGISSEMENT PROGRESSIF DE CANAL**

**A. BERREKSI<sup>1</sup>, A. KETTAB<sup>2</sup>, B. REMINI<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Chargé de cours à l'université de Bejaia (Algérie)  
Laboratoire de Recherches en Sciences de l'Eau, Ecole Nationale Polytechnique,  
Alger, Algérie

Laboratoire de Recherches Hydraulique Appliquée et Environnement,  
Université de Bejaia, E-mail : Ali\_Berreksi@Yahoo.fr,

<sup>2</sup> Professeur, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, Algérie  
Laboratoire de Recherches en Sciences de l'Eau

<sup>3</sup> Professeur, département de Génie Rural, Université de Blida, Algérie  
Chercheur au laboratoire LARHYSS, Université de Biskra, Algérie

### **INTRODUCTION**

La complexité de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts est d'autant plus importante si ces canaux sont à géométrie variable. En effet, tout changement de section ou de direction d'un canal, tel qu'un rétrécissement ou un élargissement, provoque une surface d'écoulement irrégulière et ondulée. Les élargissements de canaux à ciel ouvert, appelés souvent transitions, sont fréquemment utilisés dans plusieurs applications hydrauliques, notamment dans les coursiers d'évacuateurs de crue.

Le modèle mathématique gouvernant les écoulements bidimensionnels supercritiques est obtenu en appliquant le principe de conservation de la masse et le théorème de la quantité de mouvement en prenant en considération certaines hypothèses simplificatrices. Ce modèle hydrodynamique est donné par les équations bidimensionnelles de Saint Venant en régime d'écoulement non permanent. Etant donné que les équations obtenues sont souvent insolubles par les méthodes algébriques, on a opté pour une résolution par des méthodes numériques. La résolution a été faite en utilisant la méthode des différences finies avec un schéma explicite du type "Prédicteur-Correcteur", précis à l'ordre deux, en espace et en temps, à savoir le schéma de MacCormack.

Une analyse d'un écoulement supercritique à travers un élargissement progressif, appelé souvent "élargissement de Rouse" sera faite. L'objectif de cette analyse est la détermination de l'allure de la surface libre le long de l'axe de symétrie et le long de la paroi latérale dans l'élargissement étudié.

Les résultats obtenus sont assez satisfaisants, comparés avec les résultats numériques et expérimentaux d'autres chercheurs.

### ELARGISSEMENT DE CANAL

Un élargissement de canal dans un écoulement supercritique est fréquemment utilisé aux endroits où l'écoulement sort avec une grande vitesse à partir d'une vanne de fond, d'un évacuateur de crues ou d'un déversoir à pente raide (Berreksi 1998, Hager 1992).

Par opposition à un rétrécissement de canal où la vitesse moyenne diminue et la hauteur d'eau augmente, la vitesse dans des canaux à parois divergentes augmente et la hauteur diminue. Par conséquent, de tels écoulements n'entraînent pas des variations rapides de la hauteur d'eau (Bagge et Herbich 1967, Rouse et al. 1951). Les premières études des élargissements sont l'œuvre de Rouse (Rouse et al. 1951) et c'est pour cette raison que l'on parle souvent "d'élargissement de Rouse". Ces chercheurs ont étudié expérimentalement des élargissements de canaux dans des conditions d'écoulement torrentiel et ont déterminé par suite une forme limite définie par l'équation suivante (Hager 1992, Mazumder et Hager 1993):

$$\frac{B(x)}{b_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + f_e \left( \frac{x}{b_1 F_1} \right)^{3/2} \right] \quad (1)$$

où  $B(x)$  est la largeur du canal à une distance longitudinale  $x$ ,  $b_1$  est la largeur amont de la transition,  $f_e$  est le paramètre de courbure de la paroi et  $F_1$  est le nombre de Froude incident. Pour  $f_e = 1$ , l'élargissement obtenu est appelé "élargissement de Rouse". Il a été considéré en premier comme le plus efficace car la divergence des parois est tellement progressive (figure 1) que la distribution des pressions est hydrostatique ou pouvant être considérée comme telle, et que la formation des ondes transversales est réduite (Berreksi et Kettab 2003; Berreksi et Benmamar, 1998).

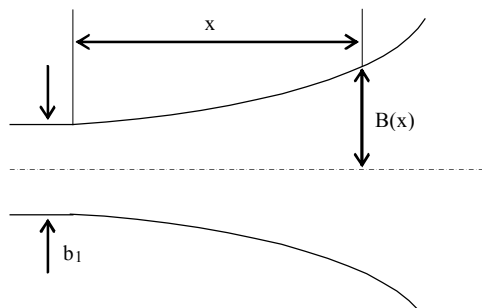


Figure 1 : Elargissement de Rouse

### MODELISATION MATHEMATIQUE

La solution des problèmes scientifiques passe par une représentation mathématique des phénomènes mis en jeu. Les équations de base régissant le

phénomène étudié ne sont autres que les équations bidimensionnelles d'un écoulement en régime non permanent données par Saint Venant. Ces équations obtenues en appliquant le principe de conservation de la masse et le théorème de la quantité de mouvement (Berreksi et Benmamar 1998; Ikni et Berreksi 2003) sont :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h + g\frac{h^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = gh(S_{ox} - S_{fx}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2h + g\frac{h^2}{2}) = gh(S_{oy} - S_{fy}) \quad (4)$$

où  $S_{ox}$  et  $S_{oy}$  sont respectivement les pentes du fond du canal selon les directions  $x$  et  $y$ , tandis que  $S_{fx}$  et  $S_{fy}$  sont les pentes de frottement selon les mêmes directions.

Dans les relations (2), (3) et (4), les quantités  $h$ ,  $u$ ,  $v$  et  $g$  désignent respectivement la profondeur de l'écoulement, la vitesse longitudinale suivant la direction  $x$ , la vitesse transversale suivant la direction  $y$  et l'accélération de la pesanteur. En outre, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$S_{ox} = \sin(\alpha_x) \quad (5)$$

$$S_{oy} = \sin(\alpha_y) \quad (6)$$

où  $\alpha_x$  et  $\alpha_y$  sont les angles d'inclinaison du fond du canal selon les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Les pentes de frottement  $S_{ox}$  et  $S_{oy}$ , déduites de la formule de Manning, s'expriment respectivement par :

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \left( \frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (7)$$

$$S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h} \left( \frac{b+h}{bh} \right)^{1/3} \quad (8)$$

Dans les relations (7) et (8),  $n$  et  $b$  désignent le coefficient de rugosité de Manning et la largeur du canal.

## MODELISATION NUMERIQUE

Les écoulements non permanents à surface libre sont donc régis par un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique non linéaire. De telles équations ne peuvent être résolues théoriquement que dans des cas particuliers (problèmes très simples ou de géométrie très particulière), rarement rencontrés dans la pratique. Par conséquent, plusieurs problèmes en hydrauliques exigent, par manque de solution analytique, une solution numérique des équations aux dérivées partielles.

Pour résoudre les équations du mouvement, on a utilisé un schéma aux différences finies explicite de type "Prédicteur-Correcteur", précis à l'ordre deux, en espace et en temps, en l'occurrence le schéma de MacCormack (Berreksi, 1998; Bhallamudi et Chaudhry, 1992; Fennema et Chaudhry, 1990).

## APPLICATION

### Etude d'un élargissement de canal

Le but de cette application est d'étudier un écoulement supercritique à travers un élargissement progressif symétrique. L'équation donnant la forme de cet élargissement, appelé souvent "élargissement de Rouse" (Berreksi et Kettab, 2003; Mazumder et Hager, 1993; Rouse et al., 1951), est obtenue par l'équation (1) pour  $f_e = 1$ , soit :

$$\frac{B(x)}{b_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{x}{b_1 F_1} \right)^{3/2} \right] \quad (9)$$

L'objectif de cette application est la détermination, d'une part des profils des lignes d'eau au niveau de l'axe de symétrie du canal ainsi que le long de ses parois latérales, et le tracé, d'autre part, du réseau d'écoulement bidimensionnel dans la structure étudiée. Lors de cette application, les données suivantes ont été considérées :

- hauteur d'eau à l'amont (initiale)  $h_o = 0,0305\text{m}$
- vitesse longitudinale à l'amont  $u_o = 1,094 \text{ m/s}$
- vitesse transversale à l'amont  $v_o = 0 \text{ m/s}$
- le canal est horizontal correspondant à  $S_{ox} = S_{oy} = 0$
- le coefficient de rugosité de Manning  $n = 0,012$
- $h_o/b_1 = 0,25$ , correspondant à une largeur  $b_1 = 0,122\text{m}$
- le nombre de Froude incident  $F_1 = 2$

Les résultats obtenus sont traduits graphiquement sur les figures (2) et (3).

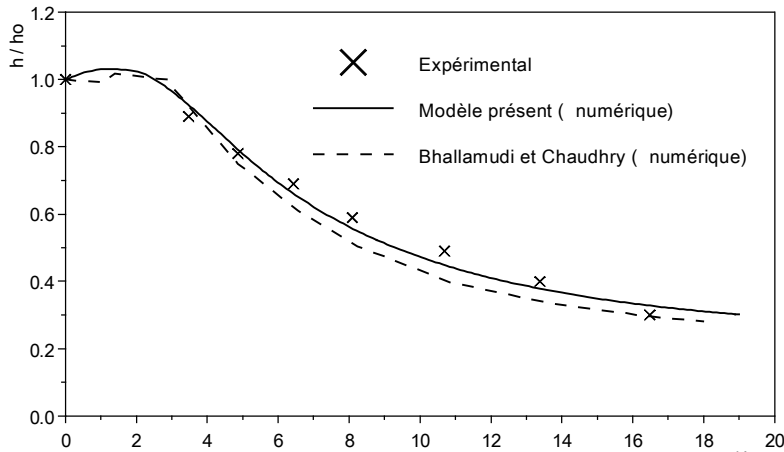


Figure 2 : Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie de l'élargissement progressif défini par la relation (9)

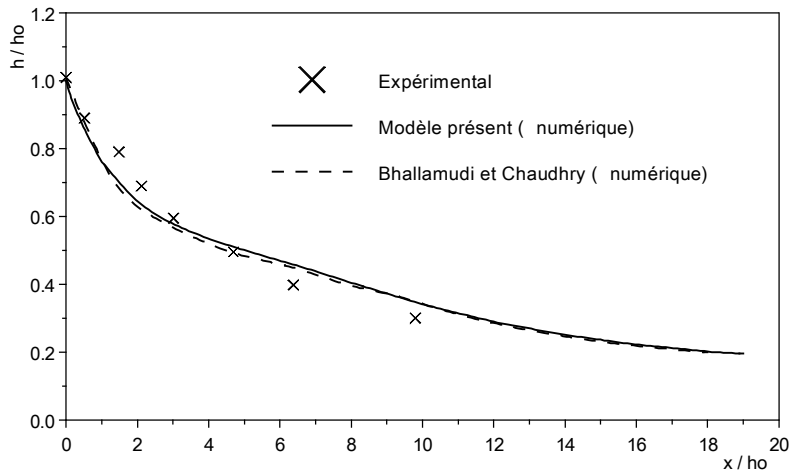


Figure 3 : Ligne d'eau le long de la paroi de l'élargissement progressif défini par la relation (9)

Au regard des figures 2 et 3, les principales remarques suivantes peuvent être indiquées :

- i. Le long de l'axe médian, la ligne d'eau diminue en fonction de la distance. Cette diminution est progressive au début de l'élargissement. Au niveau de la paroi, la surface libre diminue aussi en fonction de la distance, mais elle est plus rapide comparée à celle de l'axe de symétrie.
- ii. Les résultats obtenus par le modèle numérique élaboré avec le schéma aux différences finies explicite de MacCormack sont en bon accord avec les résultats numériques obtenus par Bhallamudi et Chaudhry (1992) le long de l'axe et de la paroi. En comparant à présent nos résultats avec ceux de Coles

et Shintaku (Bhalla et Chaudhry, 1992), on constate aussi une bonne concordance que ce soit le long de l'axe médian ou le long de la paroi latérale.

iii. On n'observe aucune perturbation de l'écoulement dans cette transition. En effet, l'augmentation de l'angle de déviation de la paroi de l'élargissement est suffisamment graduelle pour ne causer aucun changement brusque de la profondeur de l'écoulement dans toute section du canal.

La représentation schématique bidimensionnelle de l'écoulement dans l'élargissement progressif étudié, notamment celle du réseau de lignes d'égales hauteurs, est indiquée sur la figure 4.

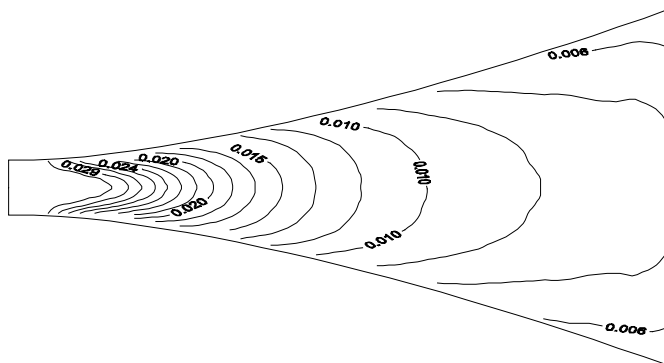


Figure 4 : Courbe Iso-Hauteurs dans l'élargissement progressif défini par la relation (9)

Nous pouvons ainsi clairement constater que dans une telle structure hydraulique, l'écoulement est dépourvu d'agitation et s'effectue de manière graduelle et non brutale.

## CONCLUSION

L'étude des écoulements supercritiques dans des canaux découverts représente une importance considérable dans le domaine de l'hydraulique. Leur complexité est d'autant plus importante si la section transversale du canal présente une géométrie irrégulière telle que celle des rétrécissements ou des élargissements, appelés souvent transitions.

Un modèle mathématique constitué d'un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique non linéaire, ayant rarement une solution analytique, a été présenté. Il s'agit du système d'équations données par Saint Venant. Ce modèle permet l'étude et la simulation des écoulements supercritiques dans des structures hydrauliques divergentes et convergentes. La résolution de ces équations a été faite en utilisant la méthode des différences finies, moyennant un schéma explicite du type "Prédicteur-Correcteur", précis à l'ordre deux, en espace et en temps, à savoir le schéma de MacCormack.

L'analyse d'un écoulement supercritique dans un élargissement progressif appelé souvent élargissement de Rouse a été faite. Le calcul de la ligne d'eau dans cet élargissement de canal donne de très bons résultats, que ce soit au niveau de l'axe de symétrie ou de la paroi latérale, lorsqu'ils sont comparés aux résultats expérimentaux et numériques d'autres chercheurs. Ceci est dû essentiellement au fait que le début de la transition en question est tellement progressif que la distribution des pressions est hydrostatique ou pouvant être considérée comme telle. Par conséquent, on peut dire d'une part que ce type d'élargissement réduit sensiblement l'effet d'une distribution non hydrostatique des pressions, contrairement à une structure convergente, et que d'autre part l'augmentation de l'angle de déviation de la paroi est suffisamment graduelle pour éviter la naissance des perturbations (formation des ondes transversales) et n'entraîner aucun changement brusque du tirant d'eau dans toute section du canal. Le modèle numérique ainsi élaboré peut être utilisé pour dimensionner ce type de structure hydraulique.

## NOTATION

$B(x)$	largeur de la transition à une distance $x$
$b_1$	largeur amont de l'élargissement
$F_1$	nombre de Froude incident
$f_e$	paramètre de courbure de la paroi
$g$	accélération de la pesanteur
$h$	profondeur d'un écoulement
$n$	coefficient de rugosité de <i>Manning</i>
$S_{ox}$	pente du fond du canal suivant la direction $x$
$S_{oy}$	pente du fond du canal suivant la direction $y$
$S_{fx}$	pente de frottement suivant la direction $x$
$S_{fy}$	pente de frottement suivant la direction $y$
$u$	vitesse longitudinale
$v$	vitesse transversale
$\alpha_x$	angle d'inclinaison du fond du canal suivant la direction $x$
$\alpha_y$	angle d'inclinaison du fond du canal suivant la direction $y$

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BAGGE, G., HERBICH, J.B. (1967). Transitions in supercritical open-channel flow. *J. Hydraul. Div., ASCE* 93(5), 23- 41.
- BERREKSI, A. (1998). Simulation des écoulements à surface libre dans des canaux à faible et à forte pente à géométrie variable. Thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger.
- BERREKSI, A., BENMAMAR, S. (1998). Simulation des écoulements à surface libre dans des canaux non prismatiques à faible pente. Troisième Séminaire National sur l'Hydraulique, 26-28 Octobre, Université de Biskra, Algérie.

- BERREKSI, A., KETTAB, A. (2003). Simulation numérique des écoulements non permanents à surface libre. Etude d'un élargissement progressif symétrique, *Colloque international Oasis Eau et population*, 22-24 Septembre, Université de Biskra, Algérie.
- BHALLAMUDI, S.M., CHAUDHRY, M.H. (1992). Computation of flows in open channel transitions. *J. Hydraul. Res., IAHR* 30(1), 77-93.
- FENNEMA, R.J., CHAUDHRY, M. H. (1990). Explicit methods for 2D transient free-surface flows, *J. Hydraul. Engng., ASCE* 116(8), 1013-1034.
- HAGER, W.H. (1992). Spillways shockwaves and air entrainment. Review and recommendation, Commission Internationale des grands Barrages, *CIGB*, Bulletin 81, Paris.
- IKNI, T., BERREKSI, A. (2003). Simulation numérique des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variable en utilisant le schéma de Beam et Warming, Séminaire sur les Technologies Mécaniques Avancées, *STEMA'03*, 07-08 Décembre, Université de Tlemcen, Algérie.
- MAZUMDER, S.K., HAGER, W.H. (1993). Supercritical expansion flow in Rouse modified and reversed transitions. *J. Hydraul. Engng., ASCE* 119(2), 201-218.
- ROUSE, H., BHOOTA, B.V., HSU, E.V. (1951). Design of channels expansions, Symposium on High-Velocity Flow in Open Channels, *Trans., ASCE* 116, 347-363.