Considérations théoriques/Exercice n° 1

1) Définition

Soit la conduite circulaire en charge représentée par la figure 1. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν, sous un gradient de la perte de charge linéaire J. Sa paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue ε. La conduite est définie par sa dimension linéaire D.

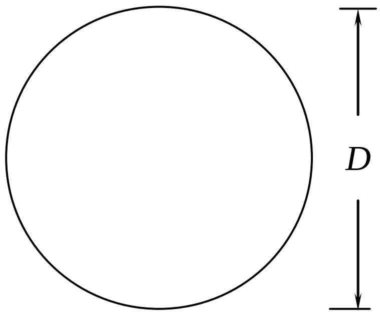

Figure 1 : Schéma de définition de la conduite circulaire en charge

2) Caractéristiques de la conduite

Les caractéristiques de la conduite circulaire en charge sont, en particulier :

i. L'aire de la section mouillée A :

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \tag{1}$$

ii. Le périmètre mouillé P :

$$P = \pi D \tag{2}$$

iii. Le diamètre hydraulique $D_h = 4A / P$:

$$D_h = D \tag{3}$$

iv. Le nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement :

$$R = \frac{4Q}{P\nu}$$

Soit :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu} \tag{4}$$

3) Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence de la conduite circulaire en charge est représenté par la figure 2. Il est caractérisé par la dimension linéaire $\overline{D}$ et écoule le débit volume $\overline{Q}$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J}$, du même liquide de viscosité cinématique ν écoulé par la conduite représentée par la figure 2.

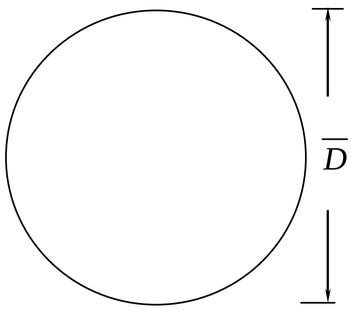

Figure 2 : Schéma de définition du modèle rugueux de référence de la conduite circulaire en charge

La nature de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est telle que le coefficient de frottement $\overline{f} = 1/16$.

Les caractéristiques du modèle de référence de la figure 2, telles que l'aire de la section mouillée $\overline{A}$, le périmètre mouillé $\overline{P}$, le diamètre hydraulique $\overline{D_h}$ et le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ s'expriment par des relations identiques à celles établies pour la conduite de la figure 1, en particulier les relations (1) à (4). Ainsi :

i. L'aire de la section mouillée $\overline{A}$ est :

$$\overline{A} = \frac{\pi \overline{D}^2}{4} \tag{5}$$

ii. Le périmètre mouillé $\overline{P}$ s'écrit :

$$\overline{P} = \pi \overline{D} \tag{6}$$

iii. Le diamètre hydraulique $\overline{D_h} = 4\overline{A}/\overline{P}$ est :

$$\overline{D_h} = \overline{D} \tag{7}$$

iv. Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ caractérisant l'écoulement est défini par :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu}$$

Soit :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\pi \overline{D} \nu} \tag{8}$$

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface
Université de Biskra, BP 145 RP 07000, Biskra, Algérie.
www.larhyss.org, info@larhyss.net ,

4) Relations régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence

La relation régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence d'une conduite en charge de forme donnée s'obtient en ayant recours à la relation de *Darcy-Weisbach* (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$\overline{J} = \frac{1}{128g}\frac{\overline{P}}{\overline{A}^3}\overline{Q}^2 \tag{9}$$

Compte tenu des relations (5) et (6), la relation (9) devient :

$$\overline{J} = \frac{1}{128g}\frac{\pi\overline{D}}{\left(\dfrac{\pi\overline{D}^2}{4}\right)^3}\overline{Q}^2$$

ou bien :

$$\overline{J} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\overline{Q}^2}{g\overline{D}^5}\right) \tag{10}$$

Introduisons le débit relatif :

$$\overline{Q}^* = \frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}\,\overline{D}^5}} \tag{11}$$

Tenant compte de (11), la relation (10) permet d'écrire que :

$$\overline{Q}^* = \pi\sqrt{2} = 4,44288294 = \text{constante} \tag{12}$$

La relation (12), écrite en termes adimensionnels, est celle qui régit l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.

De la relation (10), nous pouvons également déduire que le diamètre $\overline{D}$ du modèle rugueux de référence s'écrit :

$$\overline{D} = \left(2\pi^2\right)^{-1/5}\left(\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}}}\right)^{2/5} \tag{13}$$

ou bien :

$$\overline{D} = 0,55072406\left(\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}}}\right)^{2/5} \tag{14}$$

En combinant les relations (8) et (14), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ peut s'écrire :

$$\overline{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3}\right)^{1/5} \frac{\left(g\,\overline{J}\,\overline{Q}^3\right)^{1/5}}{\nu} \tag{15}$$

D'autre part, en éliminant $\overline{Q}$ entre les relations (8) et (13), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ peut aussi s'écrire :

$$\overline{R} = 4\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{g\,\overline{J}\,\overline{D}^3}}{\nu} \tag{16}$$

Exercice n° 1 :

On souhaite déterminer le diamètre D de la conduite circulaire en charge représentée par la figure 1. Utiliser pour cela la **MMR** en vous aidant des considérations théoriques ci-dessus exposées.

On donne :

$Q = 5,4\,m^3/s$; $J = 10^{-4}$; $\varepsilon = 0$; $\nu = 10^{-6}\,m^2/s$.

Solution

Résolvons le problème en admettant que le modèle rugueux de référence écoule le débit $\overline{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$, du même liquide de viscosité cinématique ν.

Les données du problème sont alors telles que :

i. selon la relation (14), le diamètre du modèle rugueux de référence est :

$$\overline{D} = 0,55072406\left(\frac{\overline{Q}}{\sqrt{g\overline{J}}}\right)^{2/5} = 0,55072406\left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right)^{2/5} = 0,55072406\times\left(\frac{5,4}{\sqrt{9,81\times10^{-4}}}\right)^{2/5}$$
$$= 4,320736227\,m$$

ii. Le périmètre mouillé $\overline{P}$ est, en vertu de la relation (6) :

$$\overline{P} = \pi\,\overline{D} = \pi\times 4,320736227 = 13,57399319\,m$$

iii. Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est par suite :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu} = \frac{4Q}{\overline{P}\nu} = \frac{4\times 5,4}{13,57399319\times10^{-6}} = 1591278,241$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ aurait pu également être calculé par application de la relation (15) ou (16), pour $\overline{Q} = Q$ et $\overline{J} = J$.

iv. Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la **MMR** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$\psi = 1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} = 1,35\left[-\log\left(\frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5}$$

Soit : $\psi = 1,35\times\left[-\log\left(\frac{8,5}{1591278,241}\right)\right]^{-2/5} = 0,694277077$

v. Le diamètre D recherché est :

$$D = \psi\overline{D} = 0,694277077\times 4,320736227 = 2,99978812\,m \cong 3\,m$$

vi. **Vérification des calculs**

a) ***Darcy-Weisbach***

Vérifions les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires calculées, le gradient J de la perte de charge linéaire selon la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \tag{17}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (1) :

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi\times 2,99978812^2}{4} = 7,067585046\,m^2$$

- Le diamètre hydraulique D_h correspond aussi, en vertu de la relation (3), au diamètre D, soit :

$$D_h = D = 2,99978812\,m \cong 3\,m$$

- Le coefficient de frottement f de la relation (17) est, selon la **MMR** :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,694277077^5}{16} = 0,010081941$$

Ainsi, selon la relation (17), le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J = \frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,010081941}{2,99978812}\times\frac{5,4^2}{2\times 9,81\times 7,067585046^2} = 10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

b) ***Formule générale du débit volume***

Selon *Achour et Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_h J}\,\log\left(\frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\overline{R}}\right) \tag{18}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ de la relation (18) s'exprime par la relation :

$$\overline{R} = 4\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{9,81\times10^{-4}\times2,99978812^3}}{10^{-6}} = 920545,7223$$

La relation (18) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h / 4 = 2,99978812 / 4 = 0,74994703\,m \cong 0,75\,m$$

Ainsi, le débit volume Q est, en vertu de la relation (18) :

$$Q = -4\times\sqrt{2\times9,81}\times7,067585046\times\sqrt{0,74994703\times10^{-4}}\times\log\left(\frac{10,04}{920545,7223}\right) \cong 5,381\,m^3/s$$

Ainsi, le débit volume calculé selon la formule générale correspond, avec un écart relatif de moins de 0,35%, à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

c) ***Formule de Chézy***

Selon *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{19}$$

où $C\left(m^{0,5}/s\right)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Selon la **MMR**, celui-ci est donné par :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{20}$$

Soit :

$$C = \frac{8\times\sqrt{2\times9,81}}{0,694277077^{5/2}} = 88,22820058\,m^{0,5}/s$$

Le débit volume Q serait donc, selon la relation (19) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 88,22820058\times7,067585046\times\sqrt{0,74994703\times10^{-4}} = 5,4\,m^3/s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

