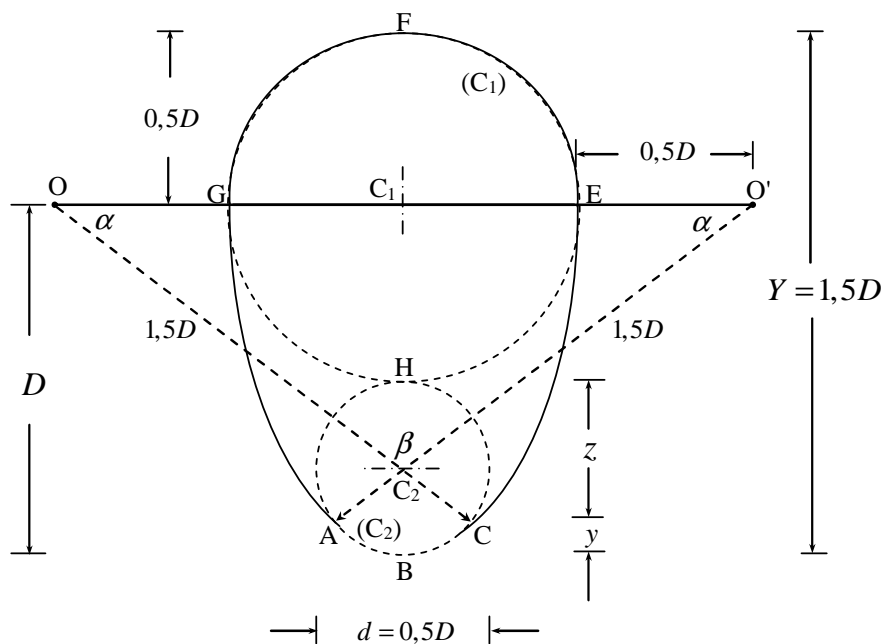


Exercice n° 2

Soit la conduite en charge de forme ovoïdale ABCEFGA représentée par la figure ci-dessous.

- a) Donner les détails du tracé de son profil
- b) Donner les expressions de la section mouillée $A(D)$ et $A(Y)$ ainsi que celles du périmètre mouillé $P(D)$ et $P(Y)$.
- c) Calculer les dimensions linéaires Y , D et d pour les données suivantes :
Débit volume $Q = 2,1 m^3 / s$; Gradient de la perte de charge linéaire $J = 10^{-4}$; Rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite $\varepsilon = 10^{-3} m$; Viscosité cinématique du liquide en écoulement $\nu = 10^{-6} m^2 / s$.
- d) Vérifier les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires calculées à l'étape c) :
 - 1) Le gradient de la perte de charge linéaire J selon *Darcy-Weisbach*.
 - 2) Le débit volume Q par la formule générale.
 - 3) Le débit volume Q par la formule de *Chézy*.



Solution

- a) Le tracé du profil ovoïdal de la conduite considérée s'opère selon les étapes suivantes :
 - i. Tracer le cercle (C_1) de centre C_1 , de diamètre $D = \overline{GE}$.
 - ii. Tracer le cercle (C_2) de centre C_2 , de diamètre $d = 0,5D$, tangent à (C_1) au point H. Les centres C_1 et C_2 se situent sur la même verticale.

- iii. Considérer deux points O et O' tels que $\overline{OE} = \overline{O'G} = 1,5D$.
- iv. Tracer les arcs de cercle \widehat{EC} et \widehat{GA} , respectivement de centre O et O' et de rayon \overline{OC} et $\overline{O'A}$, tangents au cercle (C_2) aux points A et C .

D'autre part, la figure obtenue suggère les remarques suivantes :

- i. En considérant le triangle $(\Delta O'C_1C_2)$, l'angle α est tel que :

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1O'}} = \frac{\overline{C_1H} + \overline{HC_2}}{\overline{C_1O'}} = \frac{D/2 + D/4}{D} = 0,75$$

soit : $\alpha = 36,86989765^\circ \cong 36,87^\circ$, ou bien $\alpha = 0,643501109$ radian

- ii. L'angle β est donc tel que : $\beta = (180 - 2\alpha) = (180 - 2 \times 36,86989765) = 106,2602047^\circ$,
soit : $\beta = 1,854590436$ radian

- iii. La distance verticale z s'écrit :

$$z = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} \cos(\beta/2) = \frac{d}{2} [1 + \cos(\beta/2)] = \frac{D}{4} [1 + \cos(\beta/2)]$$

soit : $z = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} \cos(\beta/2) = \frac{D}{4} [1 + \cos(106,2602047/2)] = 0,4D$

- iv. Par suite, la distance verticale y est :

$$y = d - z = 0,5D - 0,4D = 0,1D$$

- v. En outre, nous pouvons écrire que :

$$\operatorname{tg}(\beta/2) = \frac{\overline{AC}/2}{d-y} = \frac{\overline{AC}/2}{0,25D - 0,1D} = \frac{\overline{AC}}{0,3D}$$

soit : $\overline{AC} = 0,3 \operatorname{tg}(\beta/2)D = 0,3 \times \operatorname{tg}(106,2602047/2) \times D = 0,4D$

- b) Pour déterminer l'expression de l'aire de la section mouillée ainsi que celle du périmètre mouillé de la conduite, subdivisons celle-ci en quelques figures géométriques usuelles. Désignons par :

- A_o , l'aire de la section du demi-cercle GFE et telle que :

$$A_o = \frac{\pi D^2}{8} = 0,392699082D^2$$

- A_1 , l'aire du trapèze $GACEG$, de grande base $\overline{EG} = D$, de petite base $\overline{AC} = 0,4D$ et de hauteur $(z + \overline{HC_1}) = 0,4D + 0,5D = 0,9D$. L'aire A_1 s'écrit alors :

$$A_1 = \frac{(D + 0,4D)}{2} 0,9D = 0,63D^2$$

- A_2 , l'aire du segment circulaire $ABCA$ telle que, pour l'angle β exprimé en radians :

$$A_2 = \frac{d^2}{4} [\beta / 2 - \cos(\beta / 2) \sin(\beta / 2)] = \frac{D^2}{16} [\beta / 2 - \cos(\beta / 2) \sin(\beta / 2)]$$

soit :

$$A_2 = \frac{D^2}{16} \times [1,854590436 / 2 - \cos(1,854590436 / 2) \sin(1,854590436 / 2)]$$

ou bien :

$$A_2 = 0,027955951D^2$$

- A_3 , l'aire du segment circulaire de corde \overline{GA} , d'angle au centre α , appartenant au cercle de centre O' et de diamètre $3D$. Soit, pour l'angle α exprimé en radians :

$$A_3 = \frac{(3D)^2}{4} [\alpha / 2 - \sin(\alpha / 2) \cos(\alpha / 2)]$$

soit :

$$A_3 = \frac{9 \times D^2}{4} \times [0,643501109 / 2 - \sin(0,643501109 / 2) \cos(0,643501109 / 2)]$$

ou bien :

$$A_3 = 0,048938748D^2$$

Finalement, l'aire recherchée A de la conduite ovoïdale considérée est :

$$A = A_o + A_1 + A_2 + 2A_3$$

soit :

$$A = 0,392699082D^2 + 0,63D^2 + 0,027955951D^2 + 2 \times 0,048938748D^2$$

ou bien :

$$A(D) = 1,148532529D^2 \tag{1}$$

En considérant que la hauteur géométrique de la conduite ovoïdale est telle que $Y = 1,5D$, la relation (1) peut donc s'écrire :

$$A(Y) = \frac{1,148532529}{1,5^2} Y^2$$

soit :

$$A(Y) = 0,5104589Y^2 \tag{2}$$

Pour déterminer le périmètre mouillé P , considérons :

- P_o , la longueur de l'arc \widehat{GFE} , correspondant au demi-cercle de diamètre D , soit :

$$P_o = \pi D / 2 = 1,57079633D$$

- P_1 , la longueur de l'arc \widehat{GA} appartenant au secteur circulaire $O'GAO'$, de centre O' , de diamètre $3D$ et de demi-angle au centre $\alpha / 2$. Pour l'angle α exprimé en radians, P_1 est :

$$P_1 = 3D(\alpha / 2) = 3 \times D \times (0,643501109 / 2)$$

Soit :

$$P_1 = 0,96525166D$$

- P_2 , longueur de l'arc \widehat{ABC} appartenant au secteur circulaire $ABCC_2A$, de centre C_2 , de diamètre $d = 0,5D$ et de demi-angle au centre $\beta / 2$. Pour l'angle β exprimé en radians, P_2 est :

$$P_2 = 0,5D(\beta / 2) = 0,5 \times D \times (1,854590436 / 2)$$

soit :

$$P_2 = 0,46364761D$$

Finalement, le périmètre P recherché est :

$$P = P_o + 2P_1 + P_2$$

soit :

$$P = 1,57079633 \times D + 2 \times 0,96525166 \times D + 0,46364761 \times D$$

ou bien :

$$P(D) = 3,96494726D \tag{3}$$

En tenant compte du fait que $Y = 1,5D$, la relation (3) permet d'écrire que :

$$P(Y) = \frac{3,96494726}{1,5} Y$$

soit :

$$P(Y) = 2,64329818Y \tag{4}$$

c)

- Pour déterminer les dimensions linéaires Y , D et d , faisons appel à la **MMR ou Méthode du Modèle Rugueux** (Achour, 2007, *Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*).

Appliquons au modèle rugueux la relation de *Darcy-Weisbach*, en admettant que le débit \bar{Q} qu'il écoule est tel que $\bar{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\bar{J} = J$. Ainsi :

$$J = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (5)$$

\bar{A} et \bar{P} désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé du modèle rugueux. Ils sont respectivement donnés par les relations 2 et 4 en y remplaçant Y par \bar{Y} . Tenant compte de ces relations, la relation (5) s'écrit :

$$J = \frac{1}{128g} \frac{2,64329818\bar{Y}}{(0,5104589\bar{Y}^2)^3} Q^2 \quad (6)$$

En introduisant le débit relatif :

$$\bar{Q}^* = Q / \sqrt{gJ\bar{Y}^5} \quad (7)$$

la relation (6) permet aisément d'écrire que :

$$\bar{Q}^* = 2,53789166 \cong 2,538 = \text{Constante} \quad (8)$$

De la relation (7), nous pouvons déduire que la hauteur géométrique du modèle rugueux est :

$$\bar{Y} = \left(\frac{Q}{\bar{Q}^* \sqrt{gJ}} \right)^{2/5} = \left(\frac{Q}{2,53789166 \sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \quad (9)$$

Le diamètre hydraulique $\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P}$ du modèle rugueux s'écrit :

$$\bar{D}_h = 4 \times 0,5104589\bar{Y}^2 / 2,64329818\bar{Y}$$

soit :

$$\bar{D}_h = 0,77245754\bar{Y} \quad (10)$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{P\nu} = \frac{4Q}{P\nu}$$

soit :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{2,64329818\bar{Y}\nu}$$

ou bien :

$$\bar{R} = 1,51326098 \frac{Q}{Y_V} \quad (11)$$

ii. Les données du problème sont telles que :

$$\bullet \quad \bar{Y} = \left(\frac{Q}{2,53789166 \sqrt{gJ}} \right)^{2/5} = \left(\frac{2,1}{2,53789166 \times \sqrt{9,81 \times 10^{-4}}} \right)^{2/5} = 3,70479929 \text{ m} \quad (\text{Eq.9})$$

$$\bullet \quad \bar{D}_h = 0,77245754 \bar{Y} = 0,77245754 \times 3,70479929 = 2,86180015 \text{ m} \quad (\text{Eq.10})$$

$$\bullet \quad \bar{R} = 1,51326098 \frac{Q}{Y_V} = 1,51326098 \frac{2,1}{3,70479929 \times 10^{-6}} = 857765,244 \quad (\text{Eq.11})$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (12)$$

soit :

$$\psi = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2,86180015}{4,75} + \frac{8,5}{857765,244} \right) \right]^{-2/5} = 0,76937082$$

La relation (12) est applicable à l'ensemble du domaine turbulent (lisse, transition, turbulent rugueux), couvrant ainsi tout le domaine du diagramme de *Moody*. Son application s'étend également à toutes les formes usuelles de conduites en charge et même à surface libre.

iv. Les dimensions linéaires recherchées sont :

$$\bullet \quad Y = \psi \bar{Y} = 0,76937082 \times 3,70479929 = 2,85036448 \text{ m} \cong 2,85 \text{ m}$$

$$\bullet \quad D = Y / 1,5 = 2,85036448 / 1,5 = 1,90024299 \text{ m} \cong 1,9 \text{ m}$$

$$\bullet \quad d = 0,5D = 0,5 \times 1,90024299 = 0,95012149 \text{ m} \cong 0,95 \text{ m}$$

d) Vérification des calculs

i. Selon *Darcy-Weisbach*, le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (13)$$

Le coefficient de frottement f est, selon la MMR :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \quad (14)$$

soit :

$$f = \frac{0,76937082^5}{16} = 0,0168484$$

Le diamètre hydraulique D_h s'écrit de manière identique à la relation (10), soit :

$$D_h = 0,77245754Y = 0,77245754 \times 2,85036448 = 2,20178553m$$

L'aire de la section $A(Y)$ est, selon la relation (2) :

$$A(Y) = 0,5104589Y^2 = 0,5104589 \times 2,85036448^2 = 4,14726299m^2$$

En application de la relation (13), le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,0168484}{2,20178553} \times \frac{2,1^2}{2 \times 9,81 \times 4,14726299^2} = 0,0001$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

- ii. La formule générale du débit est, selon Achour et Bedjaoui (Achour and Bedjaoui, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h}J \log\left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (15)$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (15), le nombre de Reynolds \bar{R} est donné par :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \quad (16)$$

La relation (15) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody* (lisse, transition, turbulent rugueux).

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h / 4 = 2,20178553 / 4 = 0,55044638m$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} est, selon la relation (16) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 0,55044638^3}}{10^{-6}} = 578857,965$$

Ainsi, le débit volume Q est en vertu de la relation (15) :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 4,14726299 \times \sqrt{0,55044638 \times 10^{-4}} \times \log \left(\frac{0,001 / 0,55044638}{14,8} + \frac{10,04}{578857,965} \right) = 2,10083848 m^3 / s \cong 2,1 m^3 / s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

iii. Selon Chézy, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{17}$$

Le coefficient de résistance C de Chézy est selon la MMR :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{18}$$

soit :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,76937082^{5/2}} = 68,2496153 m^{0,5} / s$$

Ainsi, en vertu de la relation (17), le débit volume Q est :

$$Q = 68,2496153 \times 4,14726299 \times \sqrt{0,55044638 \times 10^{-4}} = 2,1 m^3 / s$$

Nous retrouvons bien la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.