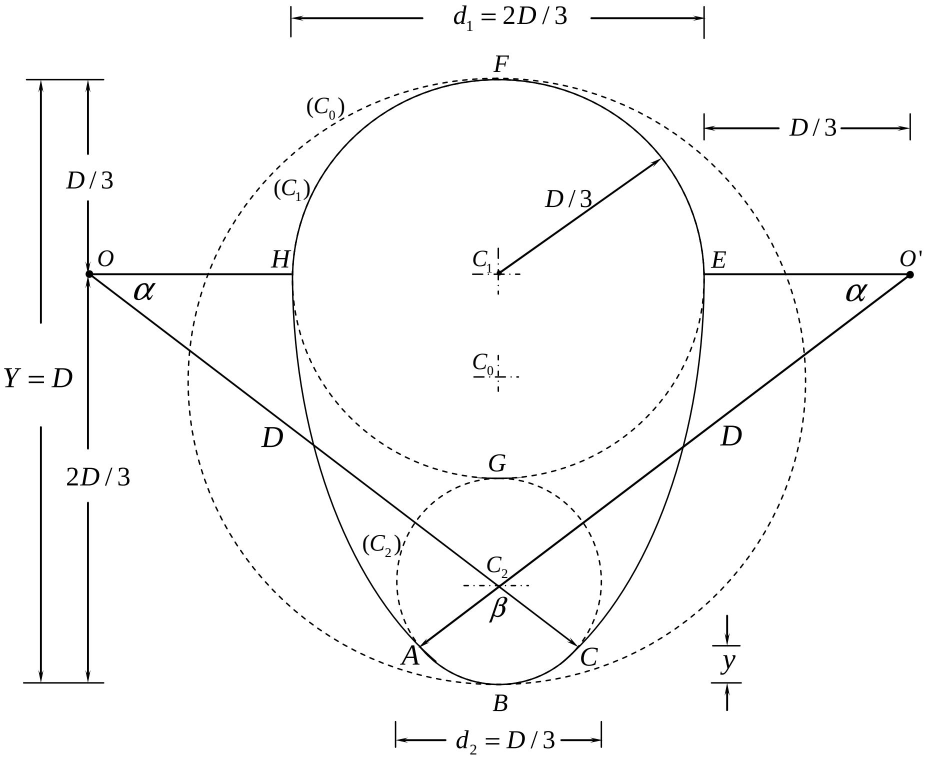
Exercice n° 3

Soit la conduite en charge de forme ovoïdale ABCEFHA, représentée par la figure ci-dessous, de hauteur $Y = D$, diamètre du cercle (C_0) et de centre C_0.



a) Exprimer les principales caractéristiques géométriques de la conduite.

b) Donner les expressions de la section mouillée $A(D)$ ainsi que celles du périmètre mouillé $P(D)$.

c) Calculer la dimension linéaire D pour les données suivantes :

Débit volume $Q = 5,094 m^3/s$; Gradient de la perte de charge linéaire $J = 10^{-4}$; Rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite $\varepsilon = 10^{-3} m$; Viscosité cinématique du liquide en écoulement $\nu = 10^{-6} m^2/s$.

d) Vérifier les calculs en déterminant, pour la dimension linéaire D calculée à l'étape c) :

1) Le gradient de la perte de charge linéaire J selon *Darcy-Weisbach*.

2) Le débit volume Q par la formule générale.

3) Le débit volume Q par la formule de *Chézy*.

Solution

a)

i. En considérant le triangle $(\triangle O'C_2C_1)$, nous pouvons écrire que :

$$tg(\alpha)=\frac{\overleftrightarrow{C_1C_2}}{\overleftrightarrow{C_1O'}}=\frac{\overleftrightarrow{C_1G}+\overleftrightarrow{GC_2}}{\overleftrightarrow{C_1E}+\overleftrightarrow{EO'}}=\frac{D/3+D/6}{D/3+D/3}=\frac{3}{4}=0,75$$

soit : $\alpha=36,8698976^{\circ}$, ou bien $\alpha=0,64350111$ radian

Par suite, le triangle $(\triangle OC_2O')$ permet d'écrire que :

$$\beta=180-2\alpha=180-2\times 36,8698976=106,260205^{\circ}$$, ou bien $\beta=1,85459044$ radian

ii. $\overleftrightarrow{C_2A}=\overleftrightarrow{C_2C}=D/6$

iii. Le triangle $(\triangle AC_2C)$ permet d'écrire que :

$$\cos(\beta/2)=\frac{\overleftrightarrow{C_2B}-y}{\overleftrightarrow{C_2C}}=\frac{D/6-y}{D/6}=1-6y/D$$

soit :

$$\frac{y}{D}=\frac{1-\cos(\beta/2)}{6}=\frac{1-\cos(1,85459044/2)}{6}=\frac{1-0,6}{6}=\frac{1}{15}$$

En outre, il est possible d'écrire que :

$$\sin(\beta/2)=\frac{\overleftrightarrow{AC}/2}{\overleftrightarrow{C_2C}}=\frac{\overleftrightarrow{AC}/2}{D/6}$$

soit :

$$\overleftrightarrow{AC}=\frac{D}{3}\sin(\beta/2)=\frac{D}{3}\times\sin(1,85459044/2)=\frac{D}{3}\times 0,8=\frac{4}{15}D \qquad (1)$$

iv. La longueur de l'arc $\widehat{ABC}$ est :

$$\widehat{ABC}=\frac{D}{3}\times\frac{\beta}{2}=\frac{D}{6}\beta=\frac{D}{6}\times 1,85459044=0,30909841D \qquad (2)$$

v. La longueur de l'arc $\widehat{HA}$, égale à celle de l'arc $\widehat{EC}$, est :

$$\widehat{HA}=2D\times\frac{\alpha}{2}=\alpha D=0,64350111D \qquad (3)$$

vi. La longueur de l'arc $\overset{\frown}{EFH}$, moitié du périmètre du cercle (C_1) est :

$$\overset{\frown}{EFH} = \pi \frac{2D/3}{2} = \frac{\pi D}{3} = 1,04719755D \tag{4}$$

b) Pour exprimer l'aire de la section mouillée A ainsi que le périmètre mouillé P de la conduite subdivisons celle-ci en quelques figures géométriques connues. Désignons par :

- A_o , l'aire de la section mouillée du demi-cercle EFH et telle que :

$$A_o = \frac{\pi(2D/3)^2}{8} = \frac{\pi D^2}{18} = 0,17453293D^2$$

- A_1, l'aire du trapèze $HECAH$,

  - de grande base $\overleftrightarrow{HE} = 2D/3$,

  - de petite base $\overleftrightarrow{AC} = \frac{4}{15}D$ (relation 1)

  - de hauteur $(2D/3 - y) = (2D/3 - D/15) = 9D/15$

  soit donc :

$$A_1 = \frac{2D/3 + 4D/15}{2} \times \frac{9D}{15} = \frac{7}{25}D^2$$

- A_2 , du segment circulaire $ABCA$, appartenant au cercle (C_2) de diamètre $d_2 = D/3$ de centre C_2 et d'angle au centre β . Pour l'angle β exprimé en radians, l'aire A_2 est :

$$A_2 = \frac{(D/3)^2}{4}[\beta/2 - \sin(\beta/2)\cos(\beta/2)]$$

  ou bien :

$$A_2 = \frac{D^2}{36} \times [1,85459044/2 - \sin(1,85459044/2) \times \cos(1,85459044/2)]$$

  soit :

$$A_2 = 0,01242487D^2$$

- A_3, l'aire du segment circulaire de corde $\overleftrightarrow{HA}$, appartenant au cercle de centre O', de diamètre $2D$ et d'angle au centre α . Pour l'angle α exprimé en radians, l'aire A_3 est :

$$A_3 = \frac{(2D)^2}{4}[\alpha/2 - \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)]$$

ou bien :

$$A_3 = D^2 \times [0,64350111/2 - \sin(0,64350111/2)\cos(0,64350111/2)]$$

soit :

$$A_3 = 0,02175055 D^2$$

Finalement, l'aire A recherchée est :

$$A = A_o + A_1 + A_2 + 2A_3$$

soit :

$$A = 0,17453293 D^2 + 7D^2/25 + 0,01242487 D^2 + 2 \times 0,02175055 D^2$$

ou bien :

$$A(D) = 0,5104589 D^2 \tag{5}$$

Nous pouvons ainsi noter que la conduite considérée occupe

$$100 \times 0,5104589 D^2 / (\pi D^2/4) = 100 \times 0,5104589/(\pi/4) = 65\%$$

de l'aire de la section de la conduite circulaire pleine de même diamètre.

Le périmètre mouillé P est tel que :

$$P = \overset{\frown}{ABC} + 2\overset{\frown}{HA} + \overset{\frown}{EFH} = 0,30909841 D + 2 \times 0,64350111 D + 1,04719755 D$$

soit :

$$P(D) = 2,64329817 D \tag{6}$$

c)

i. Pour déterminer la dimension linéaire D, faisons appel à la **MMR ou Méthode du Modèle Rugueux** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*).

Appliquons au modèle rugueux la relation de *Darcy-Weisbach*, en admettant que le débit $\overline{Q}$ qu'il écoule est tel que $\overline{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J} = J$. Ainsi :

$$J = \frac{1}{128g} \frac{\overline{P}}{\overline{A}^3} Q^2 \tag{7}$$

$\overline{A}$ et $\overline{P}$ désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé du modèle rugueux. Ils sont respectivement donnés par les relations 5 et 6 en y remplaçant D par $\overline{D}$. Tenant compte de ces relations, la relation (7) s'écrit :

$$J = \frac{1}{128g}\frac{\overline{P}}{\overline{A}^3}Q^2 = \frac{1}{128g}\frac{2,64329817\overline{D}}{\left(0,5104589\overline{D}^2\right)^3}Q^2$$

soit :

$$J = 0,15525795\frac{Q^2}{g\overline{D}^5} \qquad (8)$$

En introduisant le débit relatif :

$$\overline{Q}^* = Q/\sqrt{gJ\overline{D}^5} \qquad (9)$$

la relation (8) permet d'écrire que :

$$\overline{Q}^* = 2,53789166 = \text{Constante} \qquad (10)$$

A partir des relations (9) et (10), nous pouvons déduire que le diamètre $\overline{D}$ du modèle rugueux est :

$$\overline{D} = \left(\frac{Q}{\overline{Q}^*\sqrt{gJ}}\right)^{2/5} = \left(\frac{Q}{2,53789166\sqrt{gJ}}\right)^{2/5} \qquad (11)$$

Le diamètre hydraulique $\overline{D_h} = 4\overline{A}/\overline{P}$ du modèle rugueux s'écrit :

$$\overline{D_h} = 4\times 0,5104589\overline{D}^2 / 2,64329817\overline{D}$$

soit :

$$\overline{D_h} = 0,77245754\overline{D} \qquad (12)$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\nu} = \frac{4Q}{\overline{P}\nu}$$

soit :

$$\overline{R} = \frac{4Q}{2,64329817\overline{D}\nu}$$

ou bien :

$$\overline{R} = 1,51326099\frac{Q}{\overline{D}\nu} \qquad (13)$$

ii. Les données du problème sont telles que :

- $$\overline{D}=\left(\frac{5,094}{2,53789166\times\sqrt{9,81\times10^{-4}}}\right)^{2/5}=5,28081001m \quad \text{(Eq.11)}$$

- $$\overline{D_h}=0,77245754\overline{D}=0,77245754\times5,28081001=4,07920151m \quad \text{(Eq.12)}$$

- $$\overline{R}=1,51326099\frac{Q}{\overline{D}\nu}=1,51326099\times\frac{5,094}{5,28081001\times10^{-6}}=1459728,99 \quad \text{(Eq.13)}$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est :

$$\psi=1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75}+\frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} \quad (14)$$

soit :

$$\psi=1,35\times\left[-\log\left(\frac{10^{-3}/4,07920151}{4,75}+\frac{8,5}{1459728,99}\right)\right]^{-2/5}=0,75744827$$

La relation (14) est applicable à l'ensemble du domaine turbulent (lisse, transition, turbulent rugueux), couvrant ainsi tout le domaine du diagramme de *Moody*. Son application s'étend également à toutes les formes usuelles de conduites en charge et même à surface libre.

iv. Le diamètre D recherché est :

$$D=\psi\overline{D} \quad (15)$$

soit :

$$D=0,75744827\times5,28081001=3,99994041m\cong4m$$

La relation (15) constitue la relation fondamentale de la **MMR**. Elle traduit le fait que toute dimension linéaire d'une conduite ou d'un canal de forme quelconque est égale au produit du facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la dimension linéaire correspondante du modèle rugueux.

d) Vérification des calculs

i. Selon *Darcy-Weisbach*, le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J=\frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2} \quad (16)$$

- Le coefficient de frottement f est, selon la **MMR** :

$$f=\frac{\psi^5}{16} \tag{17}$$

soit :

$$f=\frac{0,75744827^5}{16}=0,01558278$$

- Le diamètre hydraulique D_h s'écrit de manière identique à la relation (12), soit :

$$D_h=0,77245754D=0,77245754\times 3,99994041=3,08978413\,m$$

Notons que le diamètre hydraulique D_h aurait pu être également déterminé par la relation fondamentale de la **MMR**, soit, en tenant compte de la relation (12) :

$$D_h=\psi\overline{D_h}=0,75744827\times 0,77245754\times\overline{D}$$

ou bien :

$$D_h=\psi\overline{D_h}=0,75744827\times 0,77245754\times 5,28081001=3,08978413\,m$$

- L'aire de la section $A(D)$ est, selon la relation (5) :

$$A(D)=0,5104589D^2=0,5104589\times 3,99994041^2=8,16709907\,m^2$$

En application de la relation (16), le gradient J de la perte de charge linéaire est :

$$J=\frac{f}{D_h}\frac{Q^2}{2gA^2}=\frac{0,008908638}{3,08978413}\times\frac{5,094^2}{2\times 9,81\times 8,16709907^2}=10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énonce de l'exemple d'application considéré.

ii. La formule générale du débit est, selon *Achour* et *Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q=-4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_hJ}\,\log\left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8}+\frac{10,04}{\overline{R}}\right) \tag{18}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (18), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est donné par :

$$\overline{R}=32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \tag{19}$$

La relation (18) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody* (lisse, transition, turbulent rugueux).

- Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = D_h / 4 = 3{,}08978413 / 4 = 0{,}77244603\,m$$

- Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (19) :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{9{,}81\times10^{-3}\times0{,}77244603^3}}{10^{-6}} = 962280{,}531$$

Ainsi, le débit volume Q est en vertu de la relation (18) :

$$Q = -4\times\sqrt{2\times9{,}81}\times8{,}16709907\times\sqrt{0{,}77244603\times10^{-4}}\times\log\left(\frac{10^{-3}/0{,}77244603}{14{,}8}+\frac{10{,}04}{962280{,}531}\right)$$
$$= 5{,}0988028\,m^3/s \cong 5{,}1\,m^3/s$$

Ainsi, le débit calculé correspond, avec un écart relatif de moins de 0,095%, à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

iii. Selon *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_hJ} \tag{20}$$

Le coefficient de résistance C de *Chézy* est selon la **MMR** :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{21}$$

soit :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\times\sqrt{2\times9{,}81}}{0{,}01558278^{5/2}} = 70{,}9670976\,m^{0,5}/s$$

Notons que la valeur du coefficient de résistance C n'est évidemment pas aussi précise que celle que nous venons de calculer. Nous ne conserverons cette valeur que pour les besoins du calcul.

Ainsi, en vertu de la relation (20), le débit volume Q est :

$$Q = 70{,}9670976\times8{,}16709907\times\sqrt{0{,}77244603\times10^{-4}} = 5{,}094\,m^3/s$$

Nous retrouvons bien la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.