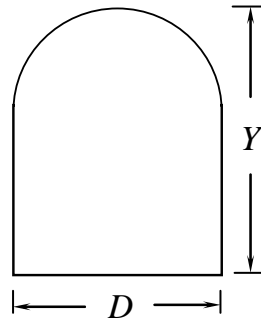


Considérations théoriques/Exercice n° 3

Soit la conduite en charge en forme de voûte représentée par la figure ci-dessous. Elle écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous un gradient de la perte de charge linéaire J . Sa paroi interne est caractérisée par une rugosité absolue ε . La forme de la conduite est définie par le paramètre de forme $\eta = Y/D$, où Y est la hauteur de la conduite et D est le diamètre du toit voûté.

On souhaite déterminer la dimension linéaire D pour les valeurs connues des paramètres Q , J , Y , ε et ν .



- Exprimer les principales caractéristiques de la conduite.
- En ayant recours à la **MMR**, donner l'expression du débit relatif $\bar{Q}^* = \bar{Q} / \sqrt{g J Y^5}$ en fonction du paramètre de forme $\bar{\eta}$ du modèle rugueux de référence.
- Déterminer la dimension linéaire D , pour les données suivantes :
 $Q = 6,92 \text{ m}^3 / \text{s}$; $Y = 2 \text{ m}$; $J = 2.10^{-3}$; $\varepsilon = 2.10^{-4} \text{ m}$; $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$
- Pour la dimension linéaire D ainsi obtenue, vérifier les calculs en déterminant :
 - Le gradient J de la perte de charge linéaire selon *DarcyWeisbach*.
 - Le débit volume Q par application de la relation générale.
 - Le débit volume Q par application de la formule de *Chézy*.

Solution

- La conduite en charge étant caractérisée par les dimensions linéaires Y et D , l'aire de la section mouillée A est la somme de l'aire de la section rectangulaire de hauteur $(Y - D/2)$ et de la largeur D , et de l'aire de la section semi-circulaire de diamètre D . Ainsi :

$$A = (Y - D/2)D + \pi D^2 / 8$$

soit :

$$A = D^2 \left(\frac{Y}{D} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \quad (1)$$

En désignant par C_0 , la constante :

$$C_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = 0,107300918 \quad (2)$$

la relation (1) s'écrit :

$$A(D, \eta) = D^2 (\eta - C_0) \quad (3)$$

ou bien, en tenant compte du fait que $D = Y / \eta$:

$$A(Y, \eta) = Y^2 \left(\frac{\eta - C_0}{\eta^2} \right) \quad (4)$$

Le périmètre mouillé P s'obtient en faisant la somme du périmètre de la partie rectangulaire de la conduite et de celui de demi-cercle constituant le toit voûté, soit :

$$P = 2 \left(Y - \frac{D}{2} \right) + D + \frac{\pi D}{2}$$

soit :

$$P(D, \eta) = 2D \left(\eta + \frac{\pi}{4} \right) \quad (5)$$

ou bien, en tenant compte du fait que $D = Y / \eta$:

$$P(Y, \eta) = 2Y \frac{(\eta + \pi / 4)}{\eta} \quad (6)$$

Le diamètre hydraulique $D_h = 4A / P$ est par suite :

$$D_h(D, \eta) = 4 \frac{D^2 (\eta - C_0)}{2D \left(\eta + \frac{\pi}{4} \right)}$$

soit :

$$D_h(D, \eta) = 2D \frac{(\eta - C_0)}{\left(\eta + \frac{\pi}{4} \right)} \quad (7)$$

Le diamètre hydraulique peut également s'écrire :

$$D_h(Y, \eta) = 2Y \frac{(\eta - C_0)}{\eta \left(\eta + \frac{\pi}{4} \right)} \quad (8)$$

- b)** La **MMR** (Achour, 2007, *Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Édition Capitale, 610 pages*) se base sur la formule bien connue de Darcy-Weisbach. Appliquée au modèle rugueux de référence, celle-ci s'écrit :

$$\bar{J} = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} \bar{Q}^2 \quad (9)$$

L'aire \bar{A} et le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux sont donnés respectivement par les relations (4) et (6) de sorte que :

$$\bar{A} = \bar{Y}^2 \left(\frac{\bar{\eta} - C_0}{\bar{\eta}} \right) \quad (10)$$

$$\bar{P} = 2\bar{Y} \frac{(\bar{\eta} + \pi/4)}{\bar{\eta}} \quad (11)$$

En tenant compte des relations (10) et (11), la relation (9) devient :

$$\bar{J} = \frac{1}{128g} \frac{2\bar{Y}(\bar{\eta} + \pi/4)}{\bar{\eta} \left[\bar{Y}^2 \left(\frac{\bar{\eta} - C_0}{\bar{\eta}} \right) \right]^3} \bar{Q}^2$$

ou bien :

$$\bar{J} = \frac{1}{64} \frac{\left(\frac{\bar{\eta} + \pi}{4} \right) \bar{\eta}^{-5}}{(\bar{\eta} - C_0)^3} \left(\frac{\bar{Q}^2}{g \bar{Y}^5} \right) \quad (12)$$

Ceci permet de déduire que :

$$\left(\frac{\bar{Q}^2}{g \bar{Y}^5} \right) = \bar{Q}^{*2} = \frac{64(\bar{\eta} - C_0)^3}{(\bar{\eta} + \pi/4) \bar{\eta}^5}$$

soit :

$$\bar{Q}^* = \frac{8(\bar{\eta} - C_0)^{3/2}}{(\bar{\eta} + \pi/4)^{1/2} \bar{\eta}^{-5/2}} \quad (13)$$

Le paramètre de forme $\bar{\eta}$ est, selon la relation (13), une fonction implicite du débit relatif \bar{Q}^* .

L'application du théorème de *Lagrange* à la relation (13) peut conduire à la solution exacte $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$. Mais celle-ci sera obtenue en termes d'une série illimitée dont l'application n'est pas pratique lorsqu'elle est destinée à l'usage de l'ingénieur. Les méthodes approximatives demeurent alors les plus intéressantes à condition qu'elles soient d'une précision acceptable. Dans le cas de la relation (13), la méthode approchée suivante peut être proposée pour la détermination explicite de $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$. Elle consiste à tracer, dans un premier temps, la variation du paramètre de forme $\bar{\eta}$ en fonction du débit relatif \bar{Q}^* . Dans un second temps, une courbe de tendance est recherchée par application de la méthode des moindres carrés non linéaires. Il a été observé que la relation (13) pouvait être remplacée, avec une excellente approximation, par la relation :

$$\bar{\eta} = \frac{3,7704 - 0,1314\bar{Q}^*}{\bar{Q}^{*0,7}} \quad (14)$$

La relation (14) a été obtenue dans la large gamme $1,3 \leq \bar{Q}^* \leq 9,8$, correspondant à $0,5 \leq \bar{\eta} \leq 3$. Dans cette gamme, l'application de la relation (14) n'occasionne qu'une erreur relative maximale de l'ordre de 0,2% seulement (Figure 1) lorsqu'elle est comparée à la relation exacte (13).

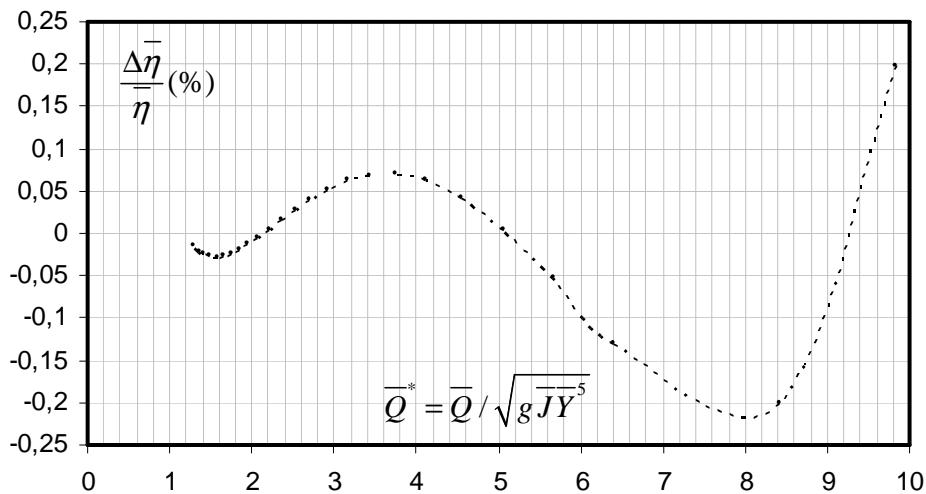


Figure 1 : Ecarts relatifs $\frac{\Delta\bar{\eta}}{\bar{\eta}}$ (%), calculés selon les relations (13) et (14), en fonction du débit relatif \bar{Q}^* .

c) **Application**

1) Admettons que le modèle rugueux de référence de la conduite considérée écoule le débit $\bar{Q} = Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\bar{J} = J$ et pour la dimension verticale $\bar{Y} = Y$.

2) Pour les données du problème, le débit relatif est tel que :

$$\bar{Q}^* = Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gJY^5}} = \frac{6,92}{\sqrt{9,81 \times 2.10^{-3} \times 2^5}} = 8,73336485$$

Le débit relatif ainsi calculé se situe bien dans la gamme $1,3 \leq \bar{Q}^* \leq 9,8$.

3) Pour ce débit relatif, la relation (14) permet de déterminer, de manière explicite, une valeur approchée du paramètre de forme $\bar{\eta}$ du modèle rugueux de référence, soit :

$$\bar{\eta} = \frac{3,7704 - 0,1314\bar{Q}^*}{\bar{Q}^{*0,7}} = \frac{3,7704 - 0,1314 \times 8,73336485}{8,73336485^{0,7}} = 0,57536573$$

4) Les caractéristiques du modèle rugueux de référence sont alors, en particulier :

- L'aire de la section mouillée \bar{A} , telle que, selon la relation (10) :

$$\bar{A} = \bar{Y}^2 \left(\frac{\bar{\eta} - C_0}{\bar{\eta}^2} \right) = Y^2 \left(\frac{\bar{\eta} - C_0}{\bar{\eta}^2} \right) = 2^2 \times \left(\frac{0,57536573 - 0,107300918}{0,57536573^2} \right) = 5,65559111 m^2$$

- Le périmètre mouillé \bar{P} , tel que, en vertu de la relation (11) :

$$\bar{P} = 2\bar{Y} \frac{(\bar{\eta} + \pi/4)}{\bar{\eta}} = 2Y \frac{(\bar{\eta} + \pi/4)}{\bar{\eta}} = 2 \times 2 \times \frac{(0,57536573 + \pi/4)}{0,57536573} = 9,46016646 m$$

- Le diamètre hydraulique \bar{D}_h , tel que :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P} = 4 \times 5,65559111 / 9,46016646 = 2,39132837 m$$

- Le nombre de Reynolds \bar{R} , tel que :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{P\nu} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 6,92}{9,46016646 \times 10^{-6}} = 2925952,74$$

5) Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (15)$$

Soit :

$$\psi = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{2 \cdot 10^{-4} / 2,39132837}{4,75} + \frac{8,5}{2925952,74} \right) \right]^{-2/5} = 0,72767831$$

La relation (15) couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*, sans aucune restriction. Elle s'applique à toutes les formes usuelles de conduites et canaux, en charge et à surface libre. La **MMR** montre que le facteur de correction ψ est, dans tous les cas, inférieur à l'unité.

- 6) Si l'on affectait à présent, au modèle rugueux de référence, la dimension linéaire \bar{Y} égale à :

$$\frac{Y}{\psi} = \frac{2}{0,72767831} = 2,74846726 \text{ m} \cong 2,75 \text{ m}$$

alors le paramètre de forme $\bar{\eta}$ serait égal au paramètre de forme η de la conduite considérée. Pour cette nouvelle valeur de \bar{Y} , le débit relatif est :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{gJ(Y/\psi)^5}} = \frac{6,92}{\sqrt{9,81 \times 2 \cdot 10^{-3} \times 2,74846726^5}} = 3,9448471$$

Le débit relatif ainsi calculé appartient aussi à la gamme $1,3 \leq \bar{Q}^* \leq 9,8$. Le paramètre de forme $\bar{\eta}$ qui lui est associé est défini par la relation (14), soit :

$$\bar{\eta} = \eta = \frac{3,7704 - 0,1314 \bar{Q}^*}{\bar{Q}^{*0,7}} = \frac{3,7704 - 0,1314 \times 3,9448471}{3,9448471^{0,7}} = 1,24433038 \cong 1,245$$

- 7) La dimension linéaire D recherchée est par suite :

$$D = \frac{Y}{\eta} = \frac{2}{1,24433038} = 1,607290183 \text{ m} \cong 1,61 \text{ m}$$

d) Vérifications des calculs

- i. Selon la relation de *Darcy-Weisbach*, le gradient de la perte de charge linéaire J est :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (16)$$

où f désigne le coefficient de frottement. Celui-ci est donné par la relation :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \quad (17)$$

Soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,72767831^5}{16} = 0,012751966$$

L'aire de la section mouillée A est, en vertu de la relation (3) :

$$A = D^2 (\eta - C_0) = 1,607290183^2 \times (1,24433038 - 0,107300918) = 2,937381133 m^2 \\ \cong 2,938 m^2$$

Le périmètre mouillé P est, selon la relation (4) :

$$P = 2D \left(\eta + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \times 1,607290183 \times \left(1,24433038 + \frac{\pi}{4} \right) = 6,524725515 m$$

Le rayon hydraulique $R_h = A / P$ est par suite :

$$R_h = \frac{2,937381133}{6,524725515} = 0,450192292 m \cong 0,45 m$$

Ainsi, le diamètre hydraulique est :

$$D_h = 4R_h = 4 \times 0,450192292 = 1,800769167 m \cong 1,80 m$$

Ainsi, le gradient de la perte de charge linéaire J est, selon la relation (24) :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,012751966}{1,800769167} \times \frac{6,92^2}{2 \times 9,81 \times 2,937381133^2} = 2.10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

- ii. La formule générale du débit est, selon Achour et Bedjaoui (Achour and Bedjaoui, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h J} \log \left(\frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (18)$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (18), le nombre de Reynolds \bar{R} s'exprime par :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \quad (19)$$

La relation (18) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de Moody.

Le nombre de Reynolds \bar{R} est, selon la relation (19) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2.10^{-3} \times 0,450192292^3}}{10^{-6}} = 1914747,715$$

Ainsi, le débit volume Q est en vertu de la relation (18) :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,937381133 \times \sqrt{0,450192292 \times 2.10^{-3}} \times \log \left(\frac{2.10^{-4} / 0,450192292}{14,8} + \frac{10,04}{1914747,715} \right) \cong 6,953 m^3 / s$$

Nous pouvons conclure que la valeur ainsi calculée du débit volume correspond, avec un écart relatif de moins de 0,5% seulement, à celle donnée à l'énoncé de l'exemple considéré.

iii. Selon la relation de Chézy, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{20}$$

où $C(m^{0,5} / s)$ est le coefficient de résistance de Chézy. Le coefficient C est lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la relation (Achour, 2007, *Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{21}$$

Soit :

$$C = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,72767831^{5/2}} = 78,44963328 m^{0,5} / s \cong 78,5 m^{0,5} / s$$

Le débit volume Q est par suite, selon la relation (20) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 78,44963328 \times 2,937381133 \times \sqrt{0,450192292 \times 2.10^{-3}} \cong 6,914 m^3 / s$$

Le débit ainsi calculé correspond, avec un écart relatif de moins de 0,08% seulement, à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.